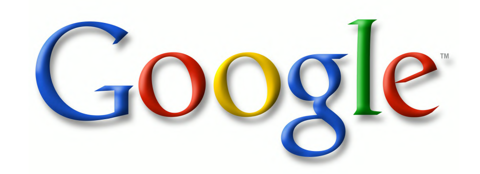










43.

ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN

AUS DER THEORIE

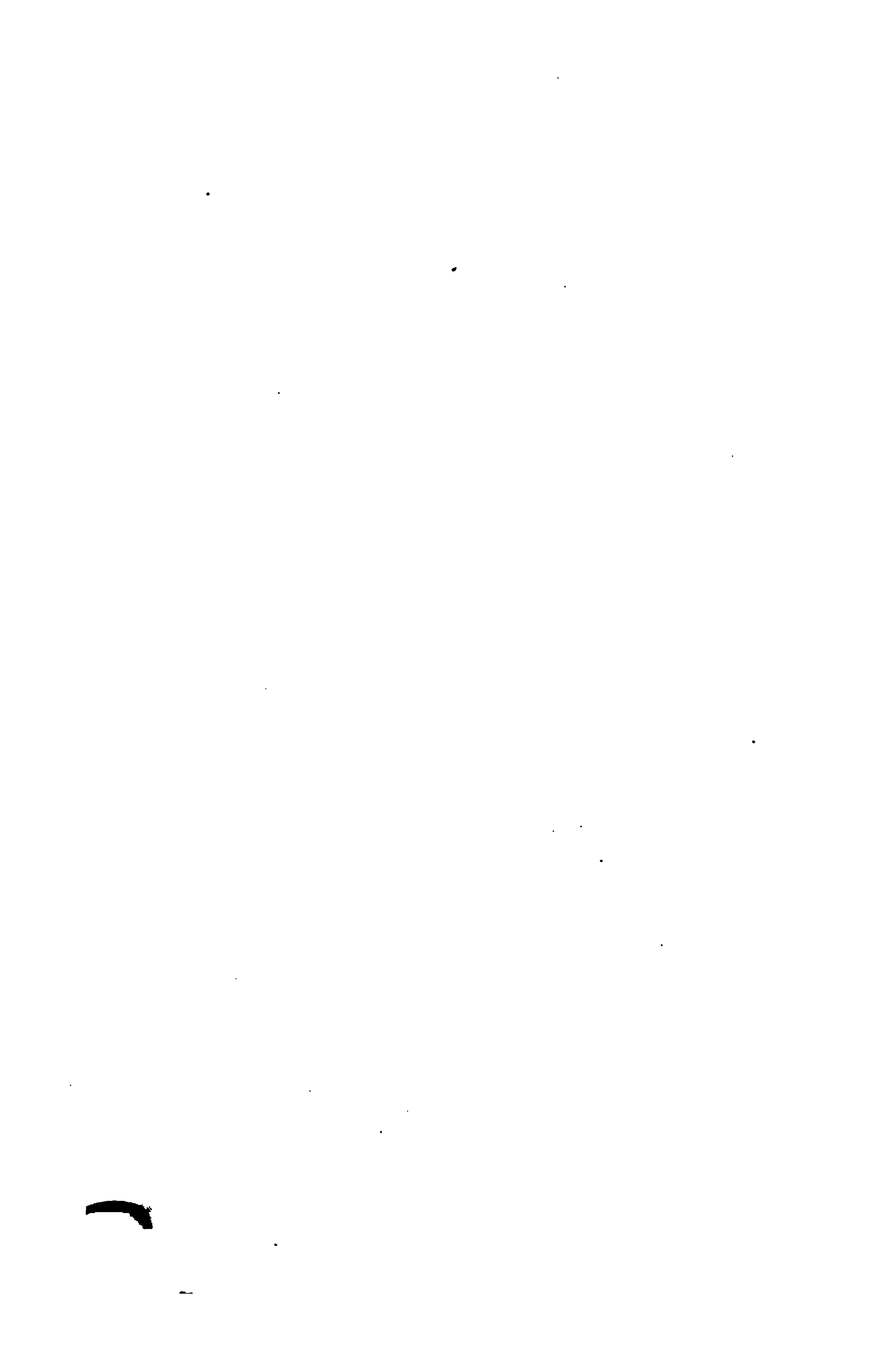
DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

LEO KÖNIGSBERGER,
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU WIEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.







einem particulären, einer Constanten und der unabhängigen Variabeln abhängt. Nachdem die Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt, für welche die Beziehung des allgemeinen zu einem particulären Integrale eine ganze oder gebrochene algebraische ist, und für diese Fälle die Form des zugehörigen Abel'schen Theorems, soweit es allgemein angegeben werden kann, ermittelt worden, wendet sich die Untersuchung zu denjenigen Differentialgleichungen, für welche das Abel'sche Theorem dem Geschlechte $p = 2$ angehört. Indem die Klasse der zugehörigen irreductibeln Differentialgleichungen sich auf diejenigen zweiter oder erster Ordnung beschränkt, und als nothwendige Bedingung dieser Differentialgleichungen die ermittelt worden, dass das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und zweier oder einer willkührlichen Constanten ist, in welche auch die unabhängige Variable algebraisch eintritt, wird diese letztere Eigenschaft allen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung zugesprochen, und die nothwendige Form aller Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt, welchen eine derartige Beziehung zukommt. Nachdem wieder die allgemeine Form der ganzen und gebrochenen rationalen Beziehungen untersucht worden, welche mit Hülfe zweier particulärer Integrale und einer Constanten das allgemeine Integral liefern, wird die Existenz derartiger algebraischer Beziehungen von der Integrabilitätsbedingung einer Pfaff'schen Gleichung abhängig gemacht und gezeigt, dass die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkührlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, die der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und der durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten ist, und es ist leicht, dann das Abel'sche Theorem für diese Klasse von Differentialgleichungen zu entwickeln, in welches zwei particuläre Integrale für algebraisch unter einander zusammenhängende Werthe der Variabeln eintreten. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über die Form des Additionstheorems der ϑ-functionen, Abel'schen Integrale und Abel'schen Functionen, welche zu schliessen gestatten, dass in dem Abel'schen Theorem von Differentialgleichungen höherer Ordnung als der ersten die Geschlechtszahl die Einheit übersteigen muss, und die algebraische Relation keine lineare sein darf, wird die Frage nach der Gestalt des Abel'schen Theorems für beliebige lineare homogene Differentialgleichungen aufgeworfen, und die Form der allgemeinsten algebraischen Relation gefunden, welche zwischen particulären Integralen derselben für algebraisch von einander abhängige Werthe der un-

abhängigen Variabeln stattfinden kann. Den Abschluss dieser Betrachtungen bildet die schon oben begonnene Untersuchung der reductibeln linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche, wenn die zwei Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, die einzig mögliche Form dieser Relation aufgestellt, und allgemein nachgewiesen wird, dass dieselben stets ein Integral erster Ordnung in Form einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung besitzen; daraus folgt dann unmittelbar die Aufstellung des Abel'schen Theorems für die reductibeln homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir kommen nunmehr zur Inhaltsangabe des zweiten Theiles der vorliegenden Untersuchungen, der sich mit der Natur der Integrale linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung beschäftigt, insofern sich diese durch algebraisch-logarithmische Functionen oder durch Verbindungen solcher Functionen und Abel'scher Integrale darstellen lassen. Es ist bekannt, dass die Arbeiten Abel's über die Theorie der elliptischen Transcendenten in ihren Resultaten sich von denen Gauss's und Jacobi's wesentlich dadurch unterscheiden, dass in denselben — vorzüglich in dem berühmten précis d'une théorie des fonctions elliptiques und in einigen vor kurzem aus dem Nachlasse von Abel veröffentlichten Noten — allgemeine Fundamentalsätze der Integralrechnung entwickelt werden, welche sich mit den Beziehungen zwischen algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen sowie mit den Reductionen solcher Functionen auf einander beschäftigen, von dem sogenannten Abel'schen Theorem abgesehen, das die Grundlage der neueren Analysis geworden ist. Nachdem ich in dem ersten Theile der vorliegenden Arbeit eine Anbahnung zur Ausdehnung des Abel'schen Theorems und der darauf beruhenden Theorieen von Quadraturen auf Lösungen von Differentialgleichungen versucht habe, beschäftige ich mich im zweiten Theile mit der Ausdehnung der Abel'schen Untersuchungen über die Reduction von Integralen algebraischer Functionen auf Integrale linearer Differentialgleichungen. Abel hat gezeigt, dass, wenn das Integral einer algebraischen Function auf algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale zurückführbar ist, das allgemeine algebraische Reductionsproblem darauf zurückgeführt werden könne, dass die Variabeln der Reductionsfunctionen rational aus den Variabeln des Abel'schen Integrales und dessen Irrationalität zusammengesetzt sind, wobei er für die Reduction elliptischer und hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale die Variabeln der Reductionsfunctionen rein rational von der Variabeln der transformirten Function abhängig zu machen im

Stande war. Von der Ausdehnung dieses letzteren Satzes schon auf den unmittelbar nächsten Fall von der Reduction eines Abel'schen Integrales auf algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale sagt aber Abel: „mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais“. In den vorliegenden Untersuchungen ist das Reductionsproblem nicht bloss für Quadraturen, sondern auch für Integrale linearer Differentialgleichungen auf das rationale zurückgeführt, und ich will im Folgenden kurz die wesentlichsten Resultate dieser Untersuchungen angeben. Wir theilen die Behandlung der Frage in zwei Theile, von denen der erste sich mit den Beziehungen beschäftigt, welche zwischen den Grenzen der Integrale der Differentialgleichung, insofern diese durch Quadraturen darstellbar sind, und den Coefficienten der Differentialgleichung bestehen, der zweite die Natur der Abel'schen Integrale und der zu ihnen gehörigen algebraischen Irrationalitäten zu untersuchen hat, welche linearen Differentialgleichungen genügen. Die erstere Untersuchung beschäftigt sich einerseits mit den Folgerungen, welche aus der Existenz eines durch algebraisch-logarithmische Functionen und Abel'sche Integrale darstellbaren Integrales einer solchen Differentialgleichung für die Beschaffenheit nothwendig daraus folgender Integrale hergeleitet werden können, andererseits mit der Untersuchung der Form eines jeden in der angegebenen Weise darstellbaren Integrales, und die Beantwortung der hier auf geworfenen Fragen bildet die eigentliche Ausdehnung der bekannten Abel'schen Sätze. Die Annahme algebraisch-logarithmischer Integrale linearer Differentialgleichungen führt auf die Existenz anderer, deren Argumente rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, und dasselbe gilt für solche aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen additiv zusammengesetzten Integrale, wobei für die Grenzen der letzteren algebraische Gleichungen eintreten, deren Coefficienten wiederum rational jene Grössen enthalten, und schon hier wird, wenigstens für binomische Irrationalitäten, die Reduction auf das rationale Problem entwickelt, für welches die Coefficienten der eben bezeichneten algebraischen Gleichungen nur rational aus der unabhängigen Variabeln zusammengesetzt sind, eine Reduction, deren Verallgemeinerung erst später gegeben werden kann, nachdem die nothwendige Beschaffenheit der Irrationalitäten untersucht worden. Zunächst wird die Bedeutung der rationalen Reduction an einigen Anwendungen nachgewiesen, indem mit Hülfe von Methoden, wie sie die Functionentheorie nahe legt und die ich schon zum Zwecke des Nachweises, dass ein allgemeines Transformationsproblem für hyper-

elliptische Integrale von höherer Ordnung als der ersten nicht existirt, früher verwerthet habe, die Fragen der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische und hyperelliptische Integrale niederer Ordnung beantwortet werden, wobei zugleich zum Abschluss dieser Untersuchungen die Verwerthung der hyperelliptischen ϑ-functionen für die Behandlung dieser Probleme besprochen wird; alle diese Reductionsprobleme werden an Beispielen erläutert. Sind die Integrale der linearen Differentialgleichung nicht additiv aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt, so lässt sich mit Hülfe oben bewiesener Sätze die nothwendige Form dieser Verbindungen feststellen, und auch für diese Zusammensetzung die Reduction auf andere rationale Formen vollziehen, welche dann auch Integrale der Differentialgleichung sein müssen. Nunmehr wendet sich die Untersuchung zur Beschaffenheit eines jeden algebraisch-logarithmischen Integrales und wirft die Frage auf, welche Eigenschaften die reducirte Differentialgleichung haben müsse, damit jenes Integral stets rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sei; diese Frage wird dann ausgedehnt auf solche Integrale von Differentialgleichungen, welche durch elliptische und Abel'sche Integrale darstellbar sind, und ähnlich durch Auffindung von Bedingungen beantwortet, wobei sich eine interessante Reduction algebraischer irreductibler Gleichungen vermöge der Transformationstheorie der elliptischen und Abel'schen Functionen ergiebt.

Endlich richtet sich die Untersuchung auf die Erforschung der Eigenschaften der algebraischen Irrationalitäten, welche den einer linearen Differentialgleichung genügenden elliptischen und Abel'schen Integralen zu Grunde liegen; nachdem die Frage wieder auf Integrale erster Gattung zurückgeführt worden, wird gezeigt, dass, wenn einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung, deren rechte Seite bei einem geschlossenen Umlaufe der Variabeln, für welchen die Coefficienten der Differentialgleichung unverändert bleiben, in ein Multiplum ihres Werthes übergeht — worin dieses Multiplum bekanntlich eine Einheitswurzel sein muss — ein elliptisches Integral genügt, unter der Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung, wenn sie überhaupt durch ein Abel'sches Integral befriedigt wird, als solches nur ein elliptisches Integral mit demselben Modul besitzt, der Integralmodul des elliptischen Integrales ein Modul complexer Multiplication sein muss, wenn jenes Multiplum nicht -1 ist; weiter liefern Betrachtungen, die der Transformationstheorie der elliptischen Functionen angehören, das Resultat, dass jene Multipla nur 3[te], 4[te] und 6[te] Einheitswurzeln und somit nur drei bestimmte elliptische Integrale, welche zu den binomischen Polynomen 3[ten], 4[ten]

und 6ten Grades gehören, Lösungen jener Differentialgleichung sein können. Nachdem auch für diese Fälle mit Hülfe des Abel'schen Theorems die Reduction auf das rationale Problem ausgeführt und gezeigt worden, wie man alle Differentialgleichungen aufstellt, welche die angegebenen Integrale zu Lösungen haben, wird die Untersuchung auf die Fälle verallgemeinert, dass zwischen mehreren Werthen der die rechte Seite der Differentialgleichung bildenden algebraischen Function eine lineare Relation stattfindet, und die Bedeutung dieser Annahme für die Entwicklung der Function um ihre Verzweigungspunkte herum geprüft; mit Hülfe von Methoden, wie sie schon mehrfach erwähnt worden, wird sodann der Satz bewiesen, dass, wenn einer linearen Differentialgleichung ein elliptisches Integral genügt, und es kommen in der Entwicklung der rechten Seite derselben um einen Verzweigungspunkt herum für einen primzahligen Cyclus ϱ nach Zusammenfassen der gleichen gebrochenen Potenzen nicht alle Potenzen mit dem Nenner ϱ vor, der Modul des elliptischen Integrales ein Modul complexer Multiplication ist, wenn die reducirte Differentialgleichung den angegebenen Beschränkungen unterliegt. Zugleich ergiebt sich aber ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen der Entwicklungsform der algebraischen Function, der complexen Multiplication und den Sätzen von der Zerlegung der Kreistheilungsgleichung, indem gezeigt wird, dass, wenn $\varrho \equiv 3 \pmod{4}$, die Entwicklung der rechten Seite der Differentialgleichung gerade $\frac{\varrho - 1}{2}$ gebrochene Potenzen enthält, deren Nenner ϱ und deren Zähler die $\frac{\varrho - 1}{2}$ quadratischen Reste oder Nichtreste von ϱ sind, dass ferner $\sqrt{-\varrho}$ der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales, und der Integralmodul selbst bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist. Aehnliche Sätze lassen sich für den Fall entwickeln, dass der linearen nicht homogenen Differentialgleichung hyperelliptische oder Abel'sche Integrale genügen, wie an den zu einer binomischen Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integralen nachgewiesen wird.

Ich will am Schlusse dieses Vorwortes nur noch bemerken, dass sich grosse Theile dieser Untersuchungen auch auf partielle Differentialgleichungen ausdehnen lassen, worauf ich jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingehen konnte, wenn ich den Zusammenhang des Ganzen nicht beeinträchtigen wollte.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Erstes Kapitel.

Die Irreductibilität algebraischer Differentialgleichungen und die Anwendung des Irreductibilitätsbegriffes bei der Untersuchung von Transcendenten.

Zweites Kapitel.

Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen.

Drittes Kapitel.

Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale von Differentialgleichungen.

Viertes Kapitel.

Ueber die Form der durch Quadraturen darstellbaren Integrale linearer, nicht homogener Differentialgleichungen.

Erstes Kapitel.

Die Irreductibilität algebraischer Differentialgleichungen und die Anwendung des Irreductibilitätsbegriffes bei der Untersuchung von Transcendenten.

§ 1.

Die Irreductibilität algebraischer Differentialgleichungen.

Die Aufstellung von Theoremen, welche grössere Klassen algebraischer Differentialgleichungen umfassen, erfordert die Einführung des Begriffes der Irreductibilität der Differentialgleichungen, welche bisher*) nur bei gewissen Klassen linearer homogener Differentialgleichungen Berücksichtigung gefunden hat.

Die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

in welcher $y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ algebraische irreductible Functionen von x bedeuten, während f eine ganze rationale Function der innerhalb der Klammern enthaltenen Grössen vorstellt, *soll dann eine irreductible genannt werden, wenn sie weder in Bezug auf* $\frac{d^m z}{dx^m}$ *im algebraischen Sinne reductibel ist, noch mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung und von demselben Charakter*

$$\varphi\left(x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0,$$

worin φ *wieder eine ganze rationale Function bedeutet, und* $\mu < m$ *ist, irgend ein Integral gemein hat.*

Für $m = 0$ fällt diese Definition der Irreductibilität der Differentialgleichungen mit derjenigen für algebraische Gleichungen zusammen.

Aus der gegebenen Definition folgt, *dass eine irreductible Differentialgleichung mit keiner anderen algebraischen Differentialgleichung derselben Ordnung, welche jedoch in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten*

---

*) Vergl. die Arbeiten des Herrn Frobenius über lineare Differentialgleichungen im Journal für Mathematik von Borchardt.

von niedrigerem Grade ist, ein Integral gemein haben kann, oder auch, dass eine irreductible Differentialgleichung für kein particuläres Integral sich in Factoren zerlegen lassen darf, welche den Charakter der gegebenen Differentialgleichung haben und in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niedrigerem Grade sind. Besitzt nämlich eine irreductible Differentialgleichung mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung, aber von niedrigerem Grade in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten ein gemeinsames Integral, so kann man mit den linken Seiten der beiden Differentialgleichungen, als Polynome von $\frac{d^m z}{dx^m}$ aufgefasst, nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers verfahren, ohne noch z irgend ein Integral bedeuten zu lassen; dann kann sich im Laufe der Operationen ein Rest ergeben, der ohne Benutzung des speciellen Werthes des gemeinsamen Integrales verschwindet, oder man gelangt zu einem Reste, der $\frac{d^m z}{dx^m}$ gar nicht mehr enthält, sondern nur aus einer rationalen Verbindung der $m-1$ ersten Differentialquotienten besteht; ist das erstere der Fall, so würde sich die gegebene Differentialgleichung für jedes z, als algebraische Gleichung in $\frac{d^m z}{dx^m}$ aufgefasst, in Factoren niedrigeren Grades in dieser Grösse zerlegen lassen, was nicht sein sollte, und träte das letztere ein, so würde, da bei der successiven Division in Folge der Annahme eines gemeinsamen Integrales der beiden Differentialgleichungen, auch stets der Rest durch dasselbe Integral identisch Null würde, somit auch der letzte Rest diese Eigenschaft besitzen, und daher das den beiden Differentialgleichungen gemeinsame Integral einer Differentialgleichung niederer Ordnung genügen, was wiederum der Annahme der Irreductibilität widerspricht. Da aber ferner, wenn die irreductible Differentialgleichung sich für irgend ein particuläres Integral z_1 mit Benutzung desselben in Factoren zerlegen lassen würde, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niedrigerem Grade wären, einer dieser Factoren verschwinden, und somit eine Differentialgleichung derselben Ordnung und in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niederem Grade existiren müsste, welche mit der gegebenen Differentialgleichung ein Integral gemein hat — was, wie eben gezeigt worden, nicht möglich ist — so kann also auch für kein Integral einer irreductibeln Differentialgleichung eine derartige Zerlegung stattfinden.

So wird z. B. die Operation des grössten gemeinsamen Theilers zwischen den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$z'^2 - z' - (z-x)^2 - (z-x) = 0 \quad \text{und} \quad z' - z + x - 1 = 0,$$

welche das gemeinsame Integral $z = e^x + x$ besitzen, einen gleich Null identischen Rest liefern und daher die algebraische Reductibilität der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades in der Form

$$z'^2 - z' - (z - x)^2 - (z - x) = (z' - z + x - 1)(z' + z - x)$$

nach sich ziehen; dagegen wird dieselbe Operation ausgeübt auf die beiden Differentialgleichungen

$$z''^3 + xz'' - z' - 8 = 0 \quad \text{und} \quad z''^2 + xz' - 2z - 4 = 0,$$

welchen das particuläre Integral $z = x^2$ gemeinsam ist, als Rest der letzten Division

$$(z' + 8)^2 + (xz' - 2z - 4)(x - xz' + 2z + 4)^2$$

liefern, welcher Ausdruck ebenfalls für $z = x^2$ verschwindet.

Es war oben gezeigt worden, dass, wenn der Rest nicht identisch verschwindet sondern ein Differentialausdruck niederer Ordnung wird, das gemeinsame Integral auch der hierdurch definirten Differentialgleichung niederer Ordnung genügen wird, aber es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass nicht jedes Integral des Restes auch ein gemeinsames Integral der beiden Differentialgleichungen wird sein müssen, da man nur schliessen kann, dass für jedes Integral des Restes die beiden Differentialgleichungen derselben Ordnung aber verschiedenen Grades, wenn die höchste Ableitung als Unbekannte aufgefasst wird, eine gemeinsame Wurzel haben, doch braucht diese nicht die höchste Ableitung jenes Integrales des Restes zu sein. So wird z. B. die Operation des grössten gemeinschaftlichen Theilers zwischen den Differentialgleichungen

$$z'' - 3z' + 2z = 0 \quad \text{und} \quad z''^2 - zz' = 0,$$

welche das Integral $z = e^x$ gemeinsam haben, den Rest

$$9z'^2 - 13zz' + 4z^2$$

liefern, und es hat in der That auch die Differentialgleichung

$$9z'^2 - 13zz' + 4z^2 = 0$$

das Integral $z = e^x$, während ihr zweites selbständiges particuläres Integral $z = e^{\frac{4}{9}x}$ weder der einen noch der anderen Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leistet; dagegen haben für $z = e^{\frac{4}{9}x}$, $z' = \frac{4}{9}e^{\frac{4}{9}x}$ die beiden Gleichungen

$$Z - 3z' + 2z = 0 \quad \text{und} \quad Z^2 - zz' = 0$$

oder

$$Z + \tfrac{2}{3}e^{\frac{4}{9}x} = 0 \quad \text{und} \quad Z^2 - \tfrac{4}{9}\left(e^{\frac{4}{9}x}\right)^2$$

die Lösung $Z = -\frac{2}{3}e^{\frac{4}{9}x}$ gemein, ohne dass diese die zweite Ableitung von $e^{\frac{4}{9}x}$ ist.

Ist eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf den Differentialquotienten erster Ordnung im algebraischen Sinne irreductibel, so muss sie, wenn sie reductibel sein soll, ein algebraisches Integral besitzen.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass, wie schon hervorgehoben worden, die Definition der Irreductibilität algebraischer Gleichungen zwar in der oben für die allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen aufgestellten enthalten ist, dass jedoch eine wesentliche Abweichung in den aus dieser Definition hergeleiteten Folgerungen statthat; während nämlich für eine algebraische Gleichung der Satz gilt, dass, wenn sie *eine* Lösung besitzt, welche nicht die Wurzel einer gleichartigen Gleichung niederen Grades ist, keine ihrer Lösungen einer Gleichung niedrigeren Grades genügen darf, da offenbar *eine* einer solchen Gleichung angehörende Lösung in Folge der Zerlegbarkeit des Gleichungspolynoms dieselbe Eigenschaft für alle anderen Lösungen nach sich zieht, wird eine Differentialgleichung particuläre Integrale haben können, welche Differentialgleichungen niederer Ordnung genügen, und auch solche, welche nur Differentialgleichungen derselben oder höherer Ordnung angehören, wie z. B. eine Differentialgleichung erster Ordnung ein transcendentes und ein algebraisches Integral haben kann. Eine Differentialgleichung, welche singuläre Integrale besitzt, kann, wie aus der Definition der Irreductibilität unmittelbar hervorgeht, nicht irreductibel sein, da ein solches Integral auch die durch Differentiation der Differentialgleichung nach dem höchsten Differentialquotienten hervorgehende Differentialgleichung befriedigen muss.

Bevor wir nun zur Aufstellung einer charakteristischen Eigenschaft irreductibler Differentialgleichungen übergehen, sei eine einfache Bemerkung vorausgeschickt, von der wir im Folgenden häufig Gebrauch machen werden. Wenn zwei algebraische Differentialgleichungen

$$f(x, z, z', z'', \cdots z^{(m)}) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, z, z', z'', \cdots\cdot z^{(n)}) = 0$$

irgend ein particuläres Integral gemein haben, so wird man durch n-malige Differentiation der ersten und m-malige der zweiten Gleichung im Ganzen $m + n + 2$ Gleichungen erhalten, aus denen man, wenn z_1 das gemeinsame Integral bedeutet, die $m + n + 1$ Grössen

$$z_1, z_1', z_1'', \cdots\cdots\cdot z_1^{(m+n)}$$

auf algebraischem Wege eliminiren, und so zu einer algebraischen Gleichung in x gelangen kann, welche nothwendig identisch erfüllt sein muss; man sieht aber sogleich, dass die Durchführung der successiven Elimination bis zu dem von z und dessen Ableitungen freien Ausdrucke nur dann möglich ist, wenn das gemeinsame Integral ein algebraisches

ist, weil sich die Grössen $z_1, z_1', \cdots z_1^{(m+n)}$ vermöge des Eliminationsprocesses als algebraische Functionen von x ergeben, und dass somit die Existenz eines gemeinsamen transcendenten Integrales als nothwendige Bedingung erfordert, dass die successive Elimination undurchführbar d. h. die oben hergeleiteten Differentialgleichungen nicht von einander unabhängig sind; so haben z. B. die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} + 2z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} - z = 0,$$

das gemeinsame transcendente Integral $z = e^x$, daher liefert die Differentiation der zweiten Gleichung eine Beziehung $\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} = 0$, welche mit der durch 2 multiplicirten zweiten Gleichung zusammengestellt, wieder auf die erste Differentialgleichung zurückführt.

Wir beweisen nun folgenden für die weitere Theorie wesentlichen Satz:

Wenn eine algebraische Differentialgleichung mit einer anderen gleichartigen von niedrigerer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein hat, welches keiner Differentialgleichung noch niederer Ordnung genügt, so werden sämmtliche Integrale der zweiten Differentialgleichung auch der ersten genügen, oder die Differentialgleichung niederer Ordnung wird ein algebraisches Integral der ersteren sein.

Hat nämlich die Differentialgleichung

$$(1) \cdots F\left(x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0$$

mit der gleichartigen Differentialgleichung

$$(2) \cdots f\left(x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

worin $m < \mu$ ist, ein Integral z_1 gemein, welches nicht zugleich einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehören soll, so denke man sich die Gleichung (2) für $z = z_1$ $(\mu - m)$-mal differentiirt, woraus sich mit Einschluss von (1) und (2) $\mu - m + 2$ Gleichungen ergeben, aus denen die $\mu - m + 1$ Grössen

$$\frac{d^m z_1}{dx^m}, \quad \frac{d^{m+1} z_1}{dx^{m+1}}, \quad \cdots \quad \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu}$$

eliminirt werden sollen, so dass man vermöge der rationalen Ausdrückbarkeit der Ableitungen der irreductibeln algebraischen Functionen $y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ durch x und diese Functionen selbst eine algebraische gleichartige Differentialgleichung

$$(3) \cdots \varphi\left(x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}\right) = 0$$

erhalten würde.

Man kann diesem Eliminationsprocesse aber eine einfache übersichtliche Gestalt geben; denn setzt man die Gleichung (2) in die Form

$$z^{(m)p} + f_1(x, z, z', \cdots z^{(m-1)})\, z^{(m)p-1} + \cdots \\ + f_p(x, z, z', \cdots z^{(m-1)}) = 0,$$

so folgt durch Differentiation

$$[p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \cdots + f_{p-1}]\, z^{(m+1)} \\ + F_1(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0,$$

durch nochmalige Differentiation mit Benutzung der zuletzt erhaltenen Gleichung

$$[p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \cdots + f_{p-1}]\, z^{(m+2)} \\ + F_2(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0,$$

u. s. w. bis

$$[p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \cdots + f_{p-1}]\, z^{(\mu)} \\ + F_{\mu-m}(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0$$

oder

$$z^{(\mu)} - \psi(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = 0,$$

in welcher Gleichung ψ eine rationale Function bedeutet, und welche ebenfalls durch das Integral z_1 befriedigt wird. Beachtet man, dass der Ausdruck

$$p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \cdots + f_{p-1}$$

wegen der für die Gleichung (2) gemachten Voraussetzung für $z = z_1$ auf Grund der oben gemachten Auseinandersetzungen nicht verschwinden kann, und denken wir uns jetzt die aus den durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen sich ergebenden Werthe von

$$z_1^{(m+1)}, \; z_1^{(m+2)}, \cdots z_1^{(\mu)}$$

in die Gleichung (1) eingesetzt, so ergiebt sich eine Gleichung

$$\Phi(x, z_1, z_1', \cdots z_1^{(m)}) = 0,$$

welche mit (2) zusammengestellt, gegen die Voraussetzung eine algebraische Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung (3) liefern würde, welche z_1 zum Integral hat; es muss daher, da auch eine Gleichung m^{ter} Ordnung in z_1 und von niedrigerem Grade in $z_1^{(m)}$ als dem p^{ten} nicht existiren soll,

$$\Phi(x, z, z', \cdots z^{(m)}) = f(x, z, z', \cdots z^{(m)}) \cdot \Psi(x, z, z', \cdots z^{(m)})$$

sein. Ist somit z_2 irgend ein anderes Integral von (2), welches also auch die durch Differentiation aus (2) hergeleitete Gleichung befriedigt, so wird dasselbe, von singulären Integralen abgesehen, der zuletzt erhaltenen Gleichung zufolge auch der Gleichung

$$\Phi(x, z_2, z_2', \cdots z_2^{(m)}) = 0$$

identisch genügen, d. h. auch im angegebenen Sinne ein Integral von (1) sein. Da dies nun von jedem Integral der Gleichung (2) gilt, so wird (2) ein algebraisches Integral der Gleichung (1) sein.

So hat die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\alpha) \cdots \frac{dz}{dx} - z + x - 1 = 0$$

das transcendente Integral

$$z = e^x + x$$

mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\beta) \cdots \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^2 - \frac{dz}{dx}(z - x) + z - x = 0$$

gemein; in der That geht aus (α) durch Differentiation mit Benutzung des Werthes von $\frac{dz}{dx}$

$$(\gamma) \cdots \frac{d^2 z}{dx^2} - z + x = 0$$

hervor, und setzt man aus (α) und (γ) die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^2 z}{dx^2}$ in (β) ein, so erhält man einen Ausdruck, der identisch gleich Null ist; es ist somit (α) ein algebraisches Integral erster Ordnung der Differentialgleichung (β).

Als specieller Fall dieses Satzes folgt, dass, *wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, mit einer anderen Differentialgleichung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, jedes Integral der ersteren auch ein Integral der letzteren ist.*

Da eine irreductible Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, und keines ihrer Integrale einer Differentialgleichung niederer Ordnung angehören darf, so folgt der Satz:

Hat eine irreductible Differentialgleichung mit einer anderen Differentialgleichung ein Integral gemein, so muss sie alle Integrale mit derselben gemein haben oder ein algebraisches Integral der letzteren sein.

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes wird sich nun aber die Definition der Irreductibilität einer Differentialgleichung am einfachsten folgendermassen gestalten:

Eine Differentialgleichung ist irreductibel, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist und kein algebraisches Integral irgend welcher Ordnung besitzt; denn vermöge der ersten Bedingung könnte sie nach der früher gegebenen Irreductibilitätsdefinition nur dann reductibel sein, wenn sie ein Integral mit einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung gemein

hat; dann ist aber dieses Integral entweder selbst ein algebraisches, oder, wenn man gleich die Differentialgleichung niedrigster Ordnung nimmt, mit der sie jenes Integral gemein hat, es ist ein algebraisch irreductibler Factor dieser Differentialgleichung ein algebraisches Integral derselben, wie eben gezeigt worden, und dies sollte nicht der Fall sein.

§ 2.

Algebraische Beziehung zwischen Transcendenten und deren Integralen.

Um die Irreductibilitätsbedingungen von Differentialgleichungen aufzufinden, wird man sich verschiedener Methoden bedienen können, die wir an einzelnen Klassen von Differentialgleichungen erläutern wollen.

Werde zuerst die Frage aufgeworfen, wann die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y),$$

worin y eine irreductible algebraische Function von x, und f eine rationale Function von x und y bedeutet, reductibel ist, so fällt diese Frage nach der oben gegebenen Definition der Irreductibilität offenbar mit der Untersuchung der Bedingungen dafür zusammen, dass

$$\int f(x, y)\, dx$$

eine algebraische Function von x ist. Haben wir es also z. B. mit einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(x)}{y}$$

zu thun, worin $F(x)$ eine rationale Function von x bedeutet, welche in den Punkten $x_1, x_2, \cdots x_n$ unendlich wird, und

$$y^2 = Ax^{2p+1} + B_0 x^{2p} + B_1 x^{2p-1} + \cdots B_{2p-1} x + B_{2p} = R(x)$$

ist, so werden sich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reductibilität dieser Differentialgleichung in der Form ausdrücken*):

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-x_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-x_2)^{-1}} = 0, \quad \cdots\cdots \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-x_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n{}_\alpha \left\{ \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{x_\alpha} \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-x_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t-1} \right\} = 0,$$

*) Siehe die achte Vorlesung meiner Theorie der hyperelliptischen Integrale.

wenn $[f(t)]_{(t-x_\alpha)^{-1}}$ und $[f(t)]_{t^{-1}}$ die Coefficienten von $(t-x_\alpha)^{-1}$ resp. t^{-1} in der Entwicklung der Function $f(t)$ in der Umgebung von x_α und ∞ bedeuten, ferner

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$
$$+ \frac{2p-r-3}{2} B_{r-3} t^2 + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1},$$

und $r = 0, 1, 2, \cdots 2p-1$ gesetzt wird.

Sind x und y rationale Functionen eines Parameters t

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t),$$

so dass die zu untersuchende Differentialgleichung in

$$\frac{dz}{dt} = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t)$$

übergeht, dann werden jene Bedingungen bekanntlich in der Form gegeben sein,

$$\Big[f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t)\Big]_{(t-\tau_1)^{-1}} = 0, \cdots \Big[f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t)\Big]_{(t-\tau_\nu)^{-1}} = 0,$$

wenn $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_\nu$ die Unstetigkeitspunkte der in der Klammer befindlichen Function bedeuten.

Handelt es sich um die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + f(x, y)z = 0,$$

so wird, da

$$z = ce^{-\int f(x, y)\,dx}$$

ist, die Frage nach den Bedingungen für die Reductibilität dieser Differentialgleichung oder für die Existenz eines algebraischen Integrales derselben mit der Untersuchung der Bedingungen zusammenfallen, unter denen sich $\int f(x, y)\,dx$ als der Logarithmus einer algebraischen Function darstellen lässt, und wir würden wieder für den Fall, dass $y = \sqrt{R(x)}$ ist, nach den oben angeführten Untersuchungen*) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen in expliciter Gestalt hinschreiben können, was wir jedoch, da wir dieselben für das Folgende nicht brauchen, hier unterlassen.

Was endlich die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung betrifft

$$\frac{dz}{dx} + zf(x, y) = \varphi(x, y_1),$$

worin y_1 auch eine irreductible algebraische Function, und φ eine rationale Zusammensetzung von x und y_1 bedeutet, so unterliegt

*) Siehe die hyperelliptischen Integrale S. 145 ff.

offenbar $f(x, y)$ gar keiner Bedingung, wenn nur $\varphi(x, y_1)$ durch die linke Seite der Differentialgleichung bestimmt wird, in der für z irgend eine algebraische Function von x gesetzt werden darf; über die Form dieser algebraischen Integrale werden wir weiter unten in einem besonderen Kapitel handeln, das sich mit den allgemeinen linearen Differentialgleichungen beschäftigen wird.*)

Sei nunmehr die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(5) \cdots\cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = f(x, y)$$

vorgelegt, in welcher y eine gegebene algebraische irreductible Function, und f eine rationale Function bedeutet, und werde wiederum die Frage nach der Reductibilität dieser Gleichung aufgeworfen; schliessen wir von vornherein den Fall aus, dass diese Differentialgleichung ein algebraisches Integral hat, oder dass $\int dx \int f(x, y)\, dx$ sich algebraisch durch x ausdrücken lässt — für welchen Fall die Bedingungen, denen $f(x, y)$ unterworfen ist, nach den oben berührten Methoden aufzustellen sind — so wird nach den früheren Untersuchungen nur zu ermitteln sein, wann die Differentialgleichung (5) ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$(6) \cdots\cdot F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

besitzt. Setzt man nunmehr

$$\int f(x, y)\, dx = J, \qquad \int dx \int f(x, y)\, dx = E,$$

so haben sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (5) die Form

$$z = E + cx + c_1,$$

worin c und c_1 willkürliche Constanten bedeuten, und da nach den früheren Ausführungen alle Integrale von (6) in denen von (5) enthalten sind, so wird das allgemeine Integral von (6) die Form haben müssen

$$z = E + \varphi(\varkappa) \cdot x + \varphi_1(\varkappa),$$

worin $\varkappa$ eine willkürliche Constante, und $\varphi(\varkappa)$, sowie $\varphi_1(\varkappa)$ fest bestimmte Functionen dieser Constanten vorstellen**). Setzt man nun

---

*) Es mag hier bemerkt werden, dass eine eindeutige doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung nie das Integral einer irreductibeln Differentialgleichung von höherer Ordnung als der ersten sein kann, da eine solche bekanntlich stets einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt, deren Coefficienten rational aus dieser Function zusammengesetzt sind.

**) Die Function $\varphi(\varkappa)$ kann nicht eine von $\varkappa$ unabhängige Constante darstellen, da sonst die Differentialgleichung erster Ordnung die Form haben müsste $\frac{dz}{dx} = \psi(x, y)$, also J eine algebraische Function wäre, welcher Fall gleich nachher ausgeschlossen wird.

in die auf die Form

$$z = F\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

gebrachte Differentialgleichung (6), worin F eine irreductible Function sein soll, in die auch x und y eintreten, den eben aufgestellten Werth für z ein, so folgt die für jedes $\varkappa$ identische Gleichung

$$E + \varphi(\varkappa) \cdot x + \varphi_1(\varkappa) = F(J + \varphi(\varkappa)),$$

oder, wenn $\varkappa_1$ ein Werth von $\varkappa$ ist, für den $\varphi(\varkappa)$ verschwindet, also

$$E + \varphi_1(\varkappa_1) = F(J)$$

ist, die Functionalgleichung

$$(7) \ldots\ldots F(J + \varphi(\varkappa)) = F(J) + \varphi(\varkappa) \cdot x + \varphi_1(\varkappa) - \varphi_1(\varkappa_1).$$

Nehmen wir nun an, dass J selbst nicht eine algebraische Function ist — denn dieser Fall erledigt sich wieder nach dem Früheren, da es sich dann nur darum handelt, zu untersuchen, wann $\int f(x, y)\, dx$ sich algebraisch ausdrücken lässt, und dann $\frac{dE}{dx} = J$ die Differentialgleichung erster Ordnung definirt, welche das algebraische Integral erster Ordnung der Differentialgleichung (5) darstellt — so muss die Gleichung (7) eine in J und $\varkappa$ identische sein, aus der man durch Differentiiren nach J die Beziehung erhält

$$F'(J + \varphi(\varkappa)) = F'(J), \quad \text{d. h. } F(J) = AJ + B,$$

worin A und B von J unabhängig sind; setzt man diesen Werth in (7) ein, so folgt

$$A(J + \varphi(\varkappa)) + B = AJ + B + \varphi(\varkappa)x + \varphi_1(\varkappa) - \varphi_1(\varkappa_1)$$

oder

$$A = x + \alpha,$$

worin α eine von $\varkappa$ abhängige Constante bedeutet, und somit

$$(8) \ldots\ldots E = (x + \alpha) J + \beta,$$

wenn β eine algebraische Function von x vorstellt. Differentiirt man nun die Gleichung (8), so erhält man

$$J = J + (x + \alpha) f(x, y) + \frac{d\beta}{dx} \quad \text{oder} \quad \beta = -\int (x + \alpha) f(x, y)\, dx,$$

und da β eine algebraische Function sein sollte, so folgt, dass die Reductibilität der Differentialgleichung (5) erfordert, dass eine Constante α existirt, für welche $\int (x + \alpha) f(x, y)\, dx$ eine algebraische Function von x ist. Aber auch umgekehrt, wenn dies stattfindet, wird (5) reductibel sein; denn durch partielle Integration folgt

$$E = \int J d(x + \alpha) = (x + \alpha) J - \int (x + \alpha) f(x, y)\, dx = (x + \alpha) J + \beta,$$

oder es ist E, d. h. ein Integral der Differentialgleichung (5), ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(9) \cdots \quad (x + \alpha) \frac{dz}{dx} - z + \beta = 0,$$

worin β der Voraussetzung gemäss eine algebraische Function bedeutet.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reductibilität der Differentialgleichung (5) *sind somit die, dass entweder*

$$\int dx \int f(x, y)\, dx \quad \text{oder} \quad \int f(x, y)\, dx$$

selbst algebraische Functionen sind, oder dass eine Constante α existirt, für welche das Integral

$$\int (x + \alpha) f(x, y)\, dx$$

sich als algebraische Function von x darstellen lässt.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{x - \varepsilon}$$

eine reductible sein, weil $\int (x - \varepsilon) \frac{dx}{x - \varepsilon} = x$ ist, und z wird nach Gleichung (9) der Differentialgleichung erster Ordnung genügen

$$(x - \varepsilon) \frac{dz}{dx} - z - x = 0,$$

was in der That für

$$z = (x - \varepsilon) \log (x - \varepsilon) - x$$

der Fall ist; ebenso wird

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{y},$$

worin $y = \sqrt{1 - x^2}$ ist, wegen $\int \frac{x dx}{y} = -y$ reductibel sein und als algebraisches Integral erster Ordnung die Differentialgleichung haben

$$x \frac{dz}{dx} - z + y = 0,$$

welcher das Integral

$$z = x \arcsin x + y$$

genügt.

Man kann die eben angestellte Irreductibilitätsuntersuchung auch noch von einem anderen Gesichtspunkte aus auffassen. Da J ein Abel'sches Integral ist, so ist die Existenz einer algebraischen Relation zwischen J und E identisch damit, *dass das Integral derjenigen Transcendenten, welche durch ein Abel'sches Integral definirt ist, algebraisch durch dieselbe Transcendente ausdrückbar ist,* und wir haben die Bedingung für die Existenz dieser Relation, und diese selbst nach Gleichung (9) stets als eine lineare gefunden; so wird nach den

obigen Auseinandersetzungen die Existenz einer algebraischen Beziehung zwischen dem hyperelliptischen Integral und dem Integrale dieser Transcendenten an die nothwendige und hinreichende Bedingung gebunden sein, dass eine Constante ε existire, für welche mit Beibehaltung der oben definirten Bezeichnungen

$$\left[\frac{F(t)(t+\varepsilon)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-x_\alpha)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n{}_\alpha \left\{ \left[\frac{F(t)(t+\varepsilon)}{\sqrt{R(t)}} \int_{x_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-x_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)(t+\varepsilon)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} \right\} = 0,$$

worin $r = 0, 1, 2, \cdots 2p-1$ zu setzen ist.

Allgemein würde nunmehr die Frage zu stellen sein, wann ist das Integral einer Transcendenten algebraisch durch eben diese Transcendente ausdrückbar, und bildet also nicht selbst eine neue selbständige Transcendente. Da nun, wenn ζ diese Transcendente bedeutet, und

$$\int \zeta\,dx = z = F(x, \zeta)$$

sein soll, worin F eine algebraische Function bezeichnet, durch Differentiation

$$\zeta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\,\frac{\partial \zeta}{dx}$$

folgt, so ergiebt sich, dass ζ das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss, und man kann entweder durch Zusammenstellung dieser Differentialgleichung mit der die Transcendente ζ etwa definirenden Differentialgleichung die Bestimmung der Function F — häufig mit Hülfe einfacher partieller Differentialgleichungen, wofür sich später noch Beispiele finden werden — ausführen, oder auch von der Ueberlegung ausgehend, dass die die Transcendente ζ definirende Differentialgleichung vermöge der oben für ζ aufgestellten Differentialgleichung erster Ordnung eine reductible sein muss, die Frage auf eine Irreductibilitätsuntersuchung zurückführen, was im Folgenden geschehen soll*).

---

*) Die Frage, wann das Integral einer durch eine algebraische Differentialgleichung definirten Transcendenten wieder durch eben diese Transcendente algebraisch ausdrückbar ist, kann auch als Frage nach den Bedingungen aufgefasst werden, unter denen die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = \zeta,$$

in welcher ζ die Lösung einer algebraischen Differentialgleichung ist, ein durch ihre Coefficienten — also von x abgesehen nur durch ζ — algebraisch ausdrückbares Integral besitzt, so dass die allgemeinere Frage sich mit den Bedingungen

Sei zuerst die in Rede stehende Transcendente als das Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(10) \cdots\cdot \frac{d\zeta}{dx} - f(x, y)\zeta = 0$$

definirt, und die Frage aufgeworfen, wann zwischen ζ und $\int \zeta dx = z$ eine algebraische Beziehung stattfindet, so wird z als Integral der Differentialgleichung

$$(11) \cdots\cdot \frac{d^2 z}{dx^2} - f(x, y)\frac{dz}{dx} = 0$$

aufgefasst werden können, während die algebraische Beziehung zwischen z und ζ in die Form gesetzt werden soll

$$(12) \cdots\cdot F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad z = \varphi\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

wenn φ eine irreductible algebraische Function bedeutet; es muss dann also die Differentialgleichung (11) eine reductible sein. Setzen wir wieder voraus, dass z selbst nicht algebraisch ist, so wird nach dem Früheren die Gleichung (12) ein algebraisches Integral erster Ordnung von (11) sein müssen, und da alle Integrale der letzteren in der Form enthalten sind

$$z = c\int e^{\int f(x, y)dx} dx + c_1,$$

so wird, wenn

$$e^{\int f(x, y)dx} = G, \quad \int e^{\int f(x, y)dx} dx = H$$

gesetzt wird, das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung (12) lauten

$$(13) \cdots\cdot z = \psi(\varkappa) \cdot H + \psi_1(\varkappa),$$

somit nach Gleichung (12)

$$\psi(\varkappa) \cdot H + \psi_1(\varkappa) = \varphi(\psi(\varkappa) \cdot G)$$

sein, und daher, da diese Gleichung für willkürliche $\varkappa$ gültig ist, wenn für $\varkappa = \varkappa_1$ $\psi(\varkappa)$ der Einheit gleich wird,

$$H = \varphi(G) - \psi_1(\varkappa_1);$$

---

zu beschäftigen haben wird, unter denen eine Differentialgleichung

$$f\left(x, \zeta, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

deren Coefficienten algebraische Functionen von x und ζ, und worin ζ die Lösung einer anderen algebraischen Differentialgleichung

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

ist, ein in x und ζ algebraisch ausdrückbares Integral besitzt.

die obige Gleichung liefert somit die Functionalgleichung

$$(14) \cdots\cdot \varphi\big(\psi(\varkappa)\cdot G\big) = \psi(\varkappa)\cdot\varphi(G) - \psi(\varkappa)\,\psi_1(\varkappa_1) + \psi_1(\varkappa).$$

Schliesst man wiederum den Fall aus, dass G eine algebraische Function oder dass $\int f(x, y)\,dx$ der Logarithmus einer algebraischen Function ist — welcher Fall wieder wie früher zu behandeln ist — so wird (14) wieder eine in G identische Gleichung sein, aus welcher durch Differentiation nach dieser Grösse folgt

$$\varphi'\big(\psi(\varkappa)\cdot G\big) = \varphi'(G), \qquad \text{d. h. } \varphi(G) = AG + B,$$

worin A und B von G unabhängig sind. Setzt man diesen Werth in (14) ein, so ergiebt sich

$$A\psi(\varkappa)\cdot G + B = A\psi(\varkappa)\cdot G + B\psi(\varkappa) - \psi(\varkappa)\,\psi_1(\varkappa_1) + \psi_1(\varkappa),$$

d. h. B ist eine Constante, während A algebraisch von x abhängt; setzt man die eben erhaltene Relation zwischen $\varphi(G)$ und G in die Form um

$$(15) \cdots\cdot \int e^{\int f(x,y)\,dx}\,dx = A e^{\int f(x,y)\,dx} + B,$$

so sieht man unmittelbar, dass eine nothwendige Bedingung dafür, dass die beiden in Betracht kommenden Transcendenten in algebraischem Zusammenhange stehen, oder dass das Integral der Lösung der Differentialgleichung (10) eine algebraische Function dieser Lösung selbst ist, derart ausgedrückt werden kann, dass die lineare Differentialgleichung

$$(16) \cdots\cdot \frac{dZ}{dx} + f(x, y)\,Z = 1$$

ein algebraisches Integral besitzt, da das allgemeine Integral derselben

$$Z = Ce^{-\int f(x,y)\,dx} + e^{-\int f(x,y)\,dx}\int e^{\int f(x,y)\,dx}\,dx$$

vermöge der Gleichung (15), wenn $C = -B$ gesetzt wird, in A übergeht. Es ist aber auch umgekehrt unmittelbar zu sehen, dass, wenn die Gleichung (16) ein algebraisches Integral besitzt, eine Beziehung von der Form (15) sich ergiebt, und wir finden somit: *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Transcendenten*

$$\int e^{\int f(x,y)\,dx}\,dx \quad \text{und} \quad e^{\int f(x,y)\,dx}$$

in einer algebraischen Beziehung zu einander stehen, oder dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - f(x, y)\,\frac{dz}{dx} = 0$$

eine reductible sei, ist die, dass die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + f(x, y)\, z = 1$$

ein algebraisches Integral habe, oder dass diese selbst wieder reductibel sei; das algebraische Integral erster Ordnung jener Differentialgleichung zweiter Ordnung hat dann stets die Form

$$z = A \frac{dz}{dx} + B,$$

worin B eine Constante, A eine algebraische Function von x ist.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1+x}{x} \frac{dz}{dx} = 0,$$

eine reductible sein, da die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1+x}{x} z = 1$$

das algebraische Integral $z = \frac{x-1}{x}$ hat, und zwar hat jene das algebraische Integral erster Ordnung

$$z = \frac{x-1}{x} \frac{dz}{dx};$$

in der That stehen die beiden Integrale

$$\int e^{\int \frac{1+x}{x} dx} dx = e^x (x-1) \quad \text{und} \quad e^{\int \frac{1+x}{x} dx} = x e^x$$

in der algebraischen Beziehung

$$\int e^{\int \frac{1+x}{x} dx} dx = \frac{x-1}{x} e^{\int \frac{1+x}{x} dx}.$$

§ 3.

Die Irreductibilitätsuntersuchung für die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Nachdem die Irreductibilitätsuntersuchung für eine specielle Differentialgleichung zweiter Ordnung durchgeführt worden, wollen wir die Bedingungen zu ermitteln suchen, unter denen die allgemeine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung irreductibel ist, eine Frage, deren Beantwortung wir zu den später folgenden Untersuchungen nöthig haben.

Sei die gegebene Differentialgleichung

$$(17) \cdots \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} + Qz = 0,$$

so ist vor allem leicht einzusehen, dass, wenn zwischen zwei Fundamentalintegralen z_1 und z_2 derselben eine algebraische Beziehung

$$(18) \cdots z_2 = f(x, z_1)$$

stattfindet, diese Gleichung nothwendig reductibel ist; denn aus

$$\frac{dz_2}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx},$$

$$\frac{d^2z_2}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$$

folgt durch Einsetzen in (17), da auch z_1 dieser Gleichung genügt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0,$$

und es würde somit z_1 die Lösung einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein, wenn nicht

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_1} = 0,$$

d. h. $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ eine Constante und somit $z_2 = Az_1 + B$ wäre, worin A eine Constante, B eine algebraische Function von x sein wird; in diesem Falle wäre aber auch B ein Integral der Differentialgleichung (17), die dann also ein algebraisches Integral hätte und ebenfalls reductibel wäre — da $B = 0$ der Voraussetzung widerspräche, dass z_1 und z_2 Fundamentalintegrale sind — *es wird somit die Differentialgleichung jedenfalls reductibel sein, wenn zwei Fundamentalintegrale in einer algebraischen Beziehung zu einander stehen.**) Dass aber eine homogene

*) Wir wollen im Hinblick auf die Untersuchungen des dritten Kapitels noch die Frage erörtern, ob für eine irreductible, nicht lineare algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \cdots\cdot \frac{d^2z}{dx^2} = F\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)$$

zwei particuläre Integrale z_1 und z_2 in einem algebraischen Zusammenhange

$$(2) \cdots\cdot z_2 = f(z_1)$$

stehen können, in welchem die Variable x nicht explicite vorkommen soll. Da nach (2)

$$z_2' = f'(z_1)z_1', \; z_2'' = f'(z_1)z_1'' + f''(z_1)z_1'^2$$

ist, so folgt aus (1)

$$(3) \cdots\cdot \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1}F(x, z_1, z_1') + \frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2}z_1'^2 = F\left(x, f(z_1), \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1}z_1'\right),$$

und diese Gleichung muss, da z_1 der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (1) wegen nicht einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen darf, eine in z_1 und z_1' identische sein. Setzen wir für z_1 in (3) eine Lösung ζ_1 der in z_1 algebraischen Gleichung $\frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} = 0$, so wird noch für willkürliche z_1' die Beziehung bestehen müssen:

$$\left(\frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2}\right)_{\zeta_1} z_1'^2 = F(x, f(z_1)_{\zeta_1}, 0),$$

und da die rechte Seite von z_1' frei ist, so muss $\left(\frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2}\right)_{\zeta_1} = 0$ sein. Differentiirt man die Gleichung (3) nach z_1, wobei man z_1' als von z_1 unabhängig be-

lineare Differentialgleichung auch reductibel sein kann, ohne dass ihre Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, sieht man z. B. aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (x - 1)\frac{dz}{dx} - xz = 0,$$

deren Fundamentalintegrale

$$z_1 = e^x, \quad z_2 = e^x \int e^{-\frac{x^2}{2} - x}\, dx,$$

wie man leicht erkennt, nicht in algebraischem Zusammenhange stehen, und die trotzdem wegen des Integrales e^x eine reductible ist.

Schliessen wir also den Fall aus, dass zwei Fundamentalintegrale in einem algebraischen Zusammenhange stehen und suchen die Bedingungen, unter denen die Gleichung (17) reductibel ist, so wird sie jedenfalls — den Fall ausgenommen, in dem sie ein algebraisches Integral besitzt — ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$(19) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = \varphi(x, z)$$

haben müssen, worin φ eine algebraische irreductible Function bedeuten soll; da nun das allgemeine Integral von (17), wenn z_1 und z_2

---

trachten darf, da die Gleichung eine in z_1 und z_1' identische war, so erhält man, wenn zugleich $z_1 = \zeta_1$ gesetzt wird, weil der erste und zweite Differentialquotient der Function $f(z_1)$ für $z_1 = \zeta_1$ Null waren, wie leicht zu sehen, auch $\left(\frac{\partial^3 f(z_1)}{\partial z_1^3}\right)_{\zeta_1} = 0$, u. s. w., so dass $f(z_1)$, weil alle seine Differentialquotienten für $z_1 = \zeta_1$ verschwinden, nothwendig eine Constante sein müsste. Dieser Schluss wäre unrichtig, wenn die Gleichung $\frac{\partial f(z_1)}{d z_1} = 0$ gar keine Lösung hätte, also $\frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1}$ von z_1 unabhängig eine Constante a wäre; in diesem Falle würde aber die Beziehung (2) zwischen den Integralen in $z_2 = az_1 + b$ übergehen, und die Functionalgleichung (3)

$$aF(x, z_1, z_1') = F(x, az_1 + b, az_1')$$

werden, welche als eine in z_1 und z_1' identische algebraische Gleichung

$$F(x, z_1, z_1') = Qz_1 + Pz_1'$$

liefert, worin P und Q algebraische Functionen von x bedeuten; die Gleichung (1) würde somit die Form annehmen

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = P\frac{dz}{dx} + Qz$$

und wäre daher eine homogene lineare; findet also für die irreductible Differentialgleichung (1), in welcher F eine algebraische Function ist, eine Beziehung von der Form (2) zwischen zwei Integralen derselben statt, so muss jene Gleichung eine lineare sein, und die Integrale sind nicht von einander unabhängig.

zwei Fundamentalintegrale sind, durch

$$z = Mz_1 + Nz_2$$

dargestellt ist, worin M und N willkürliche Constanten bedeuten, so wird auch das allgemeine Integral von (19) diese Form haben, wenn nur M und N bestimmte Functionen einer willkürlichen Integrationsconstanten c bedeuten. Bezeichnen wir nun zwei Integrale von (19) mit Z_1 und Z_2, so dass

$$Z_1 = M_1 z_1 + N_1 z_2 \quad \text{und} \quad Z_2 = M_2 z_1 + N_2 z_2$$

ist, so darf vorausgesetzt werden, dass $M_1 N_2 - M_2 N_1$ im Allgemeinen von Null verschieden ist, da, wenn dieser Ausdruck stets Null wäre, zwischen je zwei particulären Integralen von (19) die Beziehung existirte $Z_2 = \varkappa Z_1$, in der Z_1 ein bestimmtes, Z_2 jedes andere particuläre Integral, und $\varkappa$ eine willkürliche Constante wäre, dann müsste aber (19) eine lineare Differentialgleichung sein, und gerade dies wollen wir in allen Fällen nachweisen. Wir können somit z_1 und z_2 homogen linear durch Z_1 und Z_2 ausdrücken und erhalten somit das allgemeine Integral der Differentialgleichung (19) in der Form

$$z = RZ_1 + SZ_2,$$

wenn R und S bestimmte Functionen einer willkürlichen Integrationsconstanten sind. Setzen wir diesen Werth für z in (19) ein, so folgt

$$(20) \cdots \cdot \varphi(x, RZ_1 + SZ_2) = R\varphi(x, Z_1) + S\varphi(x, Z_2),$$

und da diese Gleichung vermöge der Annahme, dass zwischen z_1 und z_2, also auch zwischen Z_1 und Z_2 keine algebraische Beziehung stattfinden soll*), eine in Z_1 und Z_2 identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach Z_1 und Z_2

$$\frac{\partial \varphi(x, RZ_1 + SZ_2)}{\partial (RZ_1 + SZ_2)} = \frac{\partial \varphi(x, Z_1)}{\partial Z_1} = \frac{\partial \varphi(x, Z_2)}{\partial Z_2},$$

und daher

$$\varphi(x, Z) = \psi(x) Z + \chi(x),$$

worin $\psi(x)$ und $\chi(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten, für welche, wie durch Einsetzen dieses Werthes der φ-Function in (20)

---

*) Denn eine algebraische Beziehung $F(Z_1, Z_2) = 0$ würde $F(M_1 z_1 + N_1 z_2, M_2 z_1 + N_2 z_2) = 0$ hervorrufen, und diese Gleichung kann keine in z_1 und z_2 identische sein, da sonst durch Differentiation nach z_1 und z_2, wenn $M_1 z_1 + N_1 z_2 = I$, $M_2 z_1 + N_2 z_2 = II$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial F}{\partial I} M_1 + \frac{\partial F}{\partial II} M_2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial I} N_1 + \frac{\partial F}{\partial II} N_2 = 0,$$

also $\frac{\partial F}{\partial I} = 0$ $\frac{\partial F}{\partial II} = 0$ oder $M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0$ folgen würde, was unmöglich ist.

hervorgeht,

$$R + S = 1 \quad \text{oder} \quad \chi(x) = 0$$

folgt. Es wird somit die Differentialgleichung erster Ordnung, welche ein algebraisches Integral der Gleichung (17) ist, jedenfalls die Form haben

$$(21) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = \psi(x) z + \chi(x),$$

und wir erhalten den Satz:

Ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Fundamentalintegrale nicht selbst algebraisch sind und auch nicht in algebraischer Beziehung zu einander stehen, nicht irreductibel, so muss sie als algebraisches Integral erster Ordnung eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzen, oder anders ausgedrückt, alle jene linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nicht ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$(\mathrm{A}) \cdots\cdot c e^{\int \psi(x) dx} + e^{\int \psi(x) dx} \int e^{-\int \psi(x) dx} \chi(x) dx$$

besitzen, worin $\psi(x)$ und $\chi(x)$ algebraische Functionen von x sind), sind irreductibel.*

So wird z. B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Perioden der elliptischen Integrale erster Gattung

$$\varkappa(1 - \varkappa^2) \frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2} + (1 - 3\varkappa^2) \frac{d\Omega}{d\varkappa} - \varkappa\Omega = 0,$$

weil

$$\frac{d\Omega}{d\varkappa} = \frac{\varkappa}{\varkappa_1^2} \Omega - \frac{\varkappa}{\varkappa_1^2} E = \psi(\varkappa)\Omega + \chi(\varkappa)$$

sein müsste, und E bekanntlich nicht durch Ω mit in $\varkappa$ algebraischen Coefficienten linear ausdrückbar ist, irreductibel sein.

Zur Charakteristik jener Functionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ werde bemerkt, dass, wenn das allgemeine Integral (A) jener Differentialgleichung erster Ordnung

$$z = c e^{\int \psi(x) dx} + \Psi(x)$$

in die Gleichung (17) eingesetzt wird, wegen

$$\frac{dz}{dx} = c\,\psi(x)\, e^{\int \psi(x) dx} + \Psi'(x),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = c\,\psi(x)^2 e^{\int \psi(x) dx} + c\,\psi'(x)\, e^{\int \psi(x) dx} + \Psi''(x)$$

---

*) Ueber die rationale Ausdrückbarkeit dieser Functionen, sowie der in den früheren Untersuchungen vorkommenden algebraischen Functionen wird später in der Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen ausführlich gehandelt.

sich

$$ce^{\int\psi(x)\,dx}\left\{\psi'(x)+\psi(x)^2+P\psi(x)+Q\right\}+$$
$$+\Psi''(x)+P\Psi'(x)+Q\Psi(x)=0$$

ergiebt, welche Gleichung für willkürliche c identisch erfüllt sein muss, so dass

$$\psi'(x)+\psi(x)^2+P\psi(x)+Q=0 \quad \Psi''(x)+P\Psi'(x)+Q\Psi(x)=0,$$

d. h.
$$e^{\int\psi(x)\,dx} \quad \text{und} \quad \Psi(x)$$

selbst Integrale der Gleichung (17) sind; da nun aber das erstere dieser Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx}=z\,\psi(x)$$

genügt, so folgt, dass *die nicht irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung jedenfalls auch eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung zum algebraischen Integrale erster Ordnung haben muss*)*.

Es mag bemerkt werden — und es ist dies aus der Natur der vorher gemachten Schlüsse leicht einzusehen —, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung auch ein algebraisches Integral besitzt und mit einer Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, so dass diese Differentialgleichung nach früheren Sätzen ein algebraisches Integral erster Ordnung jener Differentialgleichung ist, diese Differentialgleichung erster Ordnung ebenfalls eine lineare sein wird; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \cdots\cdot \left(\frac{2}{3}x-\frac{4}{15}x^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\frac{4}{15}x^2-1\right)\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{2}{3}x\right)z=0$$

das algebraische Integral $z_1=\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}$, und es genügt ein zweites Fundamentalintegral $z_2=\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}+e^x$ der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx}-z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2}{5}x\right),$$

welche ein algebraisches Integral erster Ordnung von (a) ist, während das particuläre Integral $z=e^x$ der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx}=z$$

genügt, die ebenfalls ein Integral erster Ordnung von (a) darstellt.

*) Vergl. die Arbeit des Herrn Frobenius im 76. Bande des Crelle'schen Journals.

Wir werden den oben für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung erwiesenen Satz gleich nachher auf solche beliebiger Ordnung ausdehnen, an dieser Stelle werde nur noch erwähnt, dass für den Fall, dass $Q = 0$ ist, das nothwendige Bestehen der oben hergeleiteten Gleichung

$$\psi'(x) + \psi(x)^2 + P\psi(x) + Q = 0$$

auch so aufgefasst werden kann, dass die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz = 0$$

ein algebraisches Integral hat, d. h. wenn $z = \zeta^{-1}$ gesetzt wird, dass

$$\frac{d\zeta}{dx} - P\zeta = 1$$

algebraisch integrirbar ist, was in der That im § 2 als Bedingung für die Reductibilität der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx^2} - f(x,y)\frac{dz}{dx} = 0$ gefunden war.

Die obige Untersuchung war für den Fall durchgeführt worden dass die beiden Fundamentalintegrale der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht in algebraischem Zusammenhange stehen; fassen wir jetzt den Fall auf, dass eine solche algebraische Beziehung zwischen den Fundamentalintegralen existirt, wobei natürlich der Fall, dass eines derselben algebraisch ist, ausgeschlossen werden muss, da es dann das andere auch sein würde. Betrachten wir zuerst als Beispiel die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} + 2z = 0,$$

zwischen deren beiden Fundamentalintegralen $z_1 = e^x$, $z_2 = e^{2x}$ die algebraische Beziehung

$$z_2 = z_1^{\,2}$$

besteht; fassen wir das particuläre Integral $z = e^x + e^{2x}$ auf, so sieht man sogleich, dass dieses nicht einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen kann, sondern das Integral der Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - (4z + 1)\frac{dz}{dx} + z(4z + 1) = 0$$

ist, welche wiederum ein algebraisches Integral erster Ordnung der gegebenen Differentialgleichung sein wird mit dem allgemeinen Integrale $ce^x + c^2e^{2x}$; dagegen genügen die particulären Integrale z_1 und z_2 linearen homogenen Differentialgleichungen.

Wenn also für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (17) zwei Fundamentalintegrale z_1 und z_2 in der algebraischen Beziehung

$$(22) \cdots\cdot\; z_2 = f(x, z_1)$$

stehen, unter welchen Bedingungen wird dann ein particuläres Integral existiren, welches einer *linearen* Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet? Oben ist bereits gezeigt worden, dass, wenn ein particuläres Integral dieser Art existirt, jedenfalls auch ein anderes vorhanden sein muss, das eine lineare *homogene* Differentialgleichung erster Ordnung

$$(23) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = pz,$$

befriedigt, in welcher p eine algebraische Function von x bedeutet. Die unter Voraussetzung der Gleichung (18) oben erhaltene Gleichung wird, wenn wir unter z_1 grade das Integral der Gleichung (23) verstehen — und das dürfen wir, weil, wenn unter zwei Fundamentalintegralen eine algebraische Beziehung besteht, dies für je zwei solcher Integrale der Fall ist — also die Beziehung $\frac{dz_1}{dx} = pz_1$ benutzen, die Form annehmen:

$$p^2 z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + 2pz_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1 \frac{\partial f}{dz_1} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0,$$

und machen wir nunmehr die Annahme, dass in der algebraischen Relation (22) zwischen z_1 und z_2 die Variable x nicht explicite vorkommt, so wird wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} = 0$ die letzte Gleichung in

$$p^2 z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} - Qz_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + Qf = 0$$

übergehen, woraus

$$(24) \cdots\cdot \frac{Q}{p^2} = \frac{z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}}{z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - f}$$

folgt. Da nun Q und p algebraische Functionen von x sind, die rechte Seite dieser Gleichung aber nur von z_1 algebraisch abhängt, welche Grösse aber selbst nicht eine algebraische Function von x sein sollte, so müssen die beiden Seiten der Gleichung (24) constante Grössen sein, also

$$(25) \cdots\cdot \frac{Q}{p^2} = \varkappa \quad \text{und} \quad z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = \varkappa\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - f\right).$$

Aus der zweiten Gleichung (25) folgt

$$z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = \varkappa \cdot z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{f}{z_1}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\varkappa}{z_1} f + \varkappa_1,$$

worin $\varkappa_1$, da f von x frei sein sollte, wiederum eine Constante sein wird, somit durch nochmalige Integration:

$$z_2 = f(z_1) = cz_1^{\varkappa} - \frac{\varkappa_1}{\varkappa - 1} \cdot z_1, \; p = \sqrt{\frac{Q}{\varkappa}},$$

wenn c eine willkürliche Constante und $\varkappa$, da $f(z_1)$ eine algebraische Function von z_1 sein sollte, eine rationale Zahl ist; ausserdem kann $z_2 + \frac{\varkappa_1}{\varkappa - 1} z_1$ als ein zweites Fundamentalintegral zu z_1 aufgefasst werden.

Wenn also für eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (17), *deren Fundamentalintegrale in einem algebraischen, von der unabhängigen Variabeln freien Zusammenhange stehen, eines derselben z_1 einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen soll, so muss die algebraische Beziehung zwischen z_1 und einem anderen Fundamentalintegrale z_2 lauten*

$$(\text{a}) \cdots\cdot \quad z_2 = c z_1^{\varkappa},$$

und jene Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\text{b}) \cdots\cdot \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{Q}{\varkappa}} \cdot z$$

sein, welche wieder ein algebraisches Integral erster Ordnung der Differentialgleichung (17) *ist, und wie man leicht sieht, wird auch umgekehrt, wenn zwischen z_1 und z_2 eine algebraische Beziehung von der angegebenen Art existirt, z_1 die Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung* (b) *sein.*

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \left(\frac{1 + 3\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{2x}\right)\frac{dz}{dx} + xz = 0$$

die beiden Integrale

$$z_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad z_2 = e^{\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}}$$

besitzen, welche in der algebraischen Beziehung $z_2 = z_1^2$ zu einander stehen, und von denen z. B. z_1 der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{1}{2}} z.$$

Es mag noch hinzugefügt werden, dass, wenn der Quotient zweier particulären Fundamentalintegrale eine algebraische Function von x, also

$$\frac{z_2}{z_1} = F(x)$$

ist, dann aus der bekannten Beziehung

$$z_1^2 \frac{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}{dx} = c e^{-\int P dx}$$

sich

$$z_1 = \varphi(x)\, e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$$

ergiebt, worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function bedeutet, und z_1 somit, wie unmittelbar zu sehen, der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$\frac{dz}{dx} = z\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \tfrac{1}{2}P\right),$$

und ähnlich für z_2. Wir werden die Frage der algebraischen Beziehung zwischen z_1 und z_2 noch allgemeiner am Ende des dritten Kapitels erörtern.

§ 4.

Die Irreductibilitätsuntersuchung für die allgemeinen linearen Differentialgleichungen.

Es soll nun noch die Frage nach der Reductibilität einer allgemeinen linearen homogenen oder nicht homogenen Differentialgleichung aufgeworfen werden.

Sei die Differentialgleichung

$$(26) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + f_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots\cdot + f_{m-1}\frac{dz}{dx} + f_m z = f,$$

vorgelegt, in welcher $f_1, f_2, \cdots f_m, f$ algebraische Functionen von x bedeuten, und werde ihre Reductibilität angenommen, so wird sie ein algebraisches Integral niederer Ordnung besitzen

$$(27) \cdots\cdot F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^\varrho z}{dx^\varrho}\right) = 0,$$

worin $\varrho < m$, und dessen Eigenschaft ermittelt werden soll. Seien

$$z_1, z_2, \cdots z_m$$

m particuläre Fundamentalintegrale der reducirten Gleichung der Differentialgleichung (26), so lautet bekanntlich das allgemeine Integral von (26)

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots\cdot + c_m z_m + \zeta,$$

und greift man unter der Voraussetzung, dass nicht je m particuläre Integrale der Gleichung (27) mit ζ in homogener linearer Relation stehen, m solcher Integrale

$$Z_1, Z_2, \cdots Z_m$$

heraus, so müssen diese, da sie auch Integrale der Differentialgleichung (26) sein müssen, in die Form gesetzt werden können

$$(28) \cdots\cdot \begin{cases} Z_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \cdots + a_{1m} z_m + \zeta \\ Z_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \cdots + a_{2m} z_m + \zeta \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Z_m = a_{m1} z_1 + a_{m2} z_2 + \cdots + a_{mm} z_m + \zeta, \end{cases}$$

aus denen sich der gemachten Annahme zu Folge

$$(29) \cdots \begin{cases} z_1 = b_{11}(Z_1 - \zeta) + b_{12}(Z_2 - \zeta) + \cdots + b_{1m}(Z_m - \zeta) \\ z_2 = b_{21}(Z_1 - \zeta) + b_{22}(Z_2 - \zeta) + \cdots + b_{2m}(Z_m - \zeta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m = b_{m1}(Z_1 - \zeta) + b_{m2}(Z_2 - \zeta) + \cdots + b_{mm}(Z_m - \zeta) \end{cases}$$

ergiebt. Da nun alle Integrale der Gleichung (27) in dem allgemeinen Integrale der Gleichung (26) enthalten sein müssen, so wird das allgemeine Integral von (27) lauten

$$(30) \cdots z = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \cdots + A_m Z_m + M\zeta,$$

worin $A_1, A_2, \cdots A_m, M$ ϱ willkürliche Constanten enthalten; stehen dagegen je m particuläre Integrale der Gleichung (27) mit ζ in homogener linearer Relation, so hat das allgemeine Integral offenbar die Form

$$z = A_1 Z_1 + \cdots + A_{m-1} Z_{m-1} + M\zeta,$$

in allen Fällen wird also (30), wenn man auch Nullwerthe für die A-Grössen zulässt, die Form des allgemeinen Integrales der Differentialgleichung (27) darstellen, und setzt man diese Gleichung in die Form

$$(31) \cdots \frac{d^\varrho z}{dx^\varrho} = \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \cdots \frac{d^{\varrho-1} z}{dx^{\varrho-1}}\right),$$

so folgt, da

$$\frac{d^\varrho Z_s}{dx^\varrho} = \varphi\left(x, Z_s, \frac{dZ_s}{dx}, \cdots \frac{d^{\varrho-1} Z_s}{dx^{\varrho-1}}\right)$$

ist, durch Einsetzen des allgemeinen Integrales (30) mit abgekürzter Bezeichnung der Ableitungen

$$\begin{aligned}(32) \cdots \varphi\big(x,\ & A_1 Z_1 + \cdots + A_m Z_m + M\zeta,\ A_1 Z_1' + \cdots + A_m Z_m' + M\zeta', \cdots \\ & \cdots A_1 Z_1^{(\varrho-1)} + \cdots + A_m Z_m^{(\varrho-1)} + M\zeta^{(\varrho-1)}\big) \\ = {} & A_1 \varphi(x, Z_1, Z_1', \cdots Z_1^{(\varrho-1)}) + A_2 \varphi(x, Z_2, Z_2', \cdots Z_2^{(\varrho-1)}) \\ & + \cdots + A_m \varphi(x, Z_m, Z_m', \cdots Z_m^{(\varrho-1)}) + M\zeta^{(\varrho)},\end{aligned}$$

worin die ϱ willkürlichen Constanten in den A-Grössen und in M vorkommen. Nehmen wir nun ferner an, dass zwischen den m particulären Fundamentalintegralen $z_1, z_2, \cdots z_m$ der reducirten Differentialgleichung (26), der Function ζ und deren Differentialquotienten bis zur $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ resp. ϱ^{ten} Ordnung hin keine algebraische Beziehung stattfindet, dass also diese Annahme vermöge der Beziehungen (28) auch für $Z_1, Z_2, \cdots Z_m, \zeta$ und deren Ableitungen statthat, so muss die Gleichung (32) für alle Werthe von

$$(\text{a}) \cdots Z_1, Z_2, \cdots Z_m, Z_1', \cdots Z_m' \cdots Z_1^{(\varrho-1)}, \cdots Z_m^{(\varrho-1)}, \zeta, \zeta', \cdots \zeta^{(\varrho)}$$

identisch bestehen, und wir erhalten somit einerseits $M = 0$, andererseits, wenn wir

$$A_1 Z_1 + \cdots + A_m Z_m = I,\ A_1 Z_1' + \cdots + A_m Z_m' = II, \cdots$$
$$\cdots A_1 Z_1^{(\varrho-1)} + \cdots + A_m Z_m^{(\varrho-1)} = P$$

setzen, durch Differentiation nach den einzelnen Grössen (a)

$$\frac{\partial \varphi(x, I, II, \cdots P)}{\partial I} = \frac{\partial \varphi\left(x, Z_1, Z_1', \cdots Z_1^{(\varrho-1)}\right)}{\partial Z_1} =$$
$$= \frac{\partial \varphi\left(x, Z_2, Z_2', \cdots Z_2^{(\varrho-1)}\right)}{\partial Z_2} = \cdots = \frac{\partial \varphi\left(x, Z_m, Z_m' \cdots Z_m^{(\varrho-1)}\right)}{\partial Z_m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \varphi(x, I, II, \cdots P)}{dP} = \frac{\partial \varphi\left(x, Z_1, Z_1', \cdots Z_1^{(\varrho-1)}\right)}{\partial Z_1^{(\varrho-1)}} =$$
$$= \frac{\partial \varphi\left(x, Z_2, Z_2', \cdots Z_2^{(\varrho-1)}\right)}{\partial Z_2^{(\varrho-1)}} = \cdots = \frac{\partial \varphi\left(x, Z_m, Z_m', \cdots Z_m^{(\varrho-1)}\right)}{\partial Z_m^{(\varrho-1)}},$$

d. h. es ist für $\varepsilon = 1, 2, \cdots m$

$$(33) \cdot\cdot\ \varphi\left(x, Z_\varepsilon, Z_\varepsilon', \cdot\cdot Z_\varepsilon^{(\varrho-1)}\right) = L_0 Z_\varepsilon + L_1 Z_\varepsilon' + \cdot\cdot + L_{\varrho-1} Z_\varepsilon^{(\varrho-1)} + L,$$

worin $L_0, L_1, \cdots L_{\varrho-1}, L$ Functionen von x bedeuten, oder nach (31) die Form der Differentialgleichung (27)

$$(34) \cdots\cdot\ N_0 \frac{d^\varrho z}{dx^\varrho} + N_1 \frac{d^{\varrho-1} z}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + N_\varrho z = Q,$$

somit eine lineare, deren Coefficienten $N_0, N_1, \cdots N_\varrho, Q$ algebraische Functionen von x sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen muss also ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung einer linearen Differentialgleichung eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung sein.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn die ϱ particulären Fundamentalintegrale der reducirten Gleichung von (34)

$$(35) \cdots\cdot\ N_0 \frac{d^\varrho z}{dx^\varrho} + N_1 \frac{d^{\varrho-1} z}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + N_\varrho z = 0$$

mit $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho$ bezeichnet werden, wieder das allgemeine Integral von (34) die Form haben wird

$$(36) \cdots\cdot\ z = \varkappa_1 \zeta_1 + \varkappa_2 \zeta_2 + \cdots + \varkappa_\varrho \zeta_\varrho + \zeta_0,$$

worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\varrho$ willkürliche Constanten und ζ_0 eine bestimmte Function von x bedeutet; da aber das allgemeine Integral von (34) jedenfalls ein Integral der vorgelegten linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (26) sein muss, so folgt, dass auch ζ_0 ein Integral von (26) sein wird, und dass daher auch die Differentialgleichung (35) ein algebraisches Integral der reducirten Gleichung von (26) sein

wird; somit stets eine *homogene* lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung auch ein Integral der reducirten Gleichung der reductibeln Differentialgleichung (26).

Specialisiren wir den eben bewiesenen Satz für *homogene* lineare Differentialgleichungen, so ergiebt sich das folgende Theorem:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung reductibel ist, also ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung hat, und zwischen den m particulären Fundamentalintegralen und deren $\varrho - 1$ ersten Ableitungen besteht keine algebraische Beziehung, dann ist jenes algebraische Integral eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung,

oder anders ausgesprochen:

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein, welches nicht zugleich ein Integral einer Differentialgleichung noch niederer Ordnung ist, so ist unter der oben gemachten Voraussetzung jene algebraische Differentialgleichung eine lineare und zugleich eine Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung, und die letztere hat noch die reducirte Differentialgleichung eben dieser zum Integral.

Zweites Kapitel.

Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen.

§ 5.

Zwei Sätze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten.

Wir wollen im Folgenden zwei Sätze herleiten, welche die Grundlage für die Ausdehnung des Abel'schen Theorems sowie aller derjenigen Untersuchungen, die bisher an Integralen algebraischer Functionen angestellt worden sind, auf Integrale algebraischer Differentialgleichungen bilden werden.

Sei ein System von Differentialgleichungen vorgelegt

$$(1) \cdots \begin{cases} f_1\left(x_1, y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1\varrho_1}, z, \dfrac{dz}{dx_1}, \cdots \dfrac{d^{m_1}z}{dx_1^{m_1}}\right) = 0 \\ f_2\left(x_2, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2\varrho_2}, z, \dfrac{dz}{dx_2}, \cdots \dfrac{d^{m_2}z}{dx_2^{m_2}}\right) = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_\varkappa\left(x_\varkappa, y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa\varrho_\varkappa}, z, \dfrac{dz}{dx_\varkappa}, \cdots \dfrac{d^{m_\varkappa}z}{dx_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = 0, \end{cases}$$

in denen $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa$ von einander unabhängige Variable, $y_{\sigma 1}, y_{\sigma 2}, \cdots y_{\sigma \varrho_\sigma}$ im Allgemeinen verschiedene algebraische irreductible Functionen der Veränderlichen x_σ vorstellen, und werde angenommen, dass diese Differentialgleichungen in Bezug auf ihren höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel seien, und eine Reihe bestimmter particulärer Integrale $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$ der resp. Differentialgleichungen (1) existire, welche nicht schon gleichartigen Differentialgleichungen niederer Ordnung Genüge leisten — wie dies für irreductible Differentialgleichungen stets der Fall ist —, seien ferner die Differentialgleichungen gegeben:

$$(2) \cdots \begin{cases} F_1\left(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1\,1}, y_{\varkappa+1\,2}, \cdots y_{\varkappa+1\,\varrho_{\varkappa+1}}, z, \frac{dz}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1}z}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}}\right) = 0 \\ F_2\left(x_{\varkappa+2}, y_{\varkappa+2\,1}, y_{\varkappa+2\,2}, \cdots y_{\varkappa+2\,\varrho_{\varkappa+2}}, z, \frac{dz}{dx_{\varkappa+2}}, \cdots \frac{d^{n_2}z}{dx_{\varkappa+2}^{n_2}}\right) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_\lambda\left(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda\,1}, y_{\varkappa+\lambda\,2}, \cdots y_{\varkappa+\lambda\,\varrho_{\varkappa+\lambda}}, z, \frac{dz}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{n_\lambda}z}{dx_{\varkappa+\lambda}^{n_\lambda}}\right) = 0, \end{cases}$$

deren unabhängige Variabeln $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ mit den unabhängigen Variabeln des Systems (1) algebraisch verbunden sind, während $y_{\varkappa+\sigma 1}, \cdots y_{\varkappa+\sigma \varrho_{\varkappa+\sigma}}$ irreductible algebraische Functionen von $x_{\varkappa+\sigma}$ bedeuten sollen, und stellen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ wieder λ particuläre Integrale der keiner weiteren Bedingung unterworfenen Differentialgleichungen (2) vor; nehmen wir endlich an, dass zwischen den $\varkappa + \lambda$ Integralen $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ der Differentialgleichungen (1) und (2) und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung bestehe

$$(3) \cdots F\left\{z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1}z_1}{dx_1^{M_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \cdots \frac{d^{M_2}z}{dx_2^{M_2}}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+\lambda}}z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{M_{\varkappa+\lambda}}}\right\} = 0,$$

in welche auch die Variabeln und die den einzelnen Differentialgleichungen angehörigen algebraischen Irrationalitäten eintreten dürfen, so soll *die Unveränderlichkeit der algebraischen Beziehung* (3) *erwiesen werden*, wenn statt des Systems particulärer Integrale der Differentialgleichungen (1) *beliebige* andere particuläre Integrale dieser, statt derjenigen der Differentialgleichungen (2) aber *bestimmte* andere particuläre Integrale dieser substituirt werden und zwar für Werthe der unabhängigen Variabeln, welche mit denen des ersten Systems auch noch in den gegebenen algebraischen Beziehungen stehen.

Der Kürze wegen mag im Folgenden die Reihe der algebraischen

Irrationalitäten $y_{\sigma 1}, y_{\sigma 2}, \cdots y_{\sigma \varrho_\sigma}$ immer durch einen Repräsentanten y_σ ersetzt werden, es mögen ferner fürs erste die Variabeln $x_2, x_3, \cdots x_\varkappa$ nebst den zugehörigen Integralen $z_2, z_3, \cdots z_\varkappa$ als Parameter betrachtet, und vermöge der algebraischen Beziehungsgleichungen

$$(4) \cdots \begin{cases} \varphi_1(x_{\varkappa+1}, x_1, x_2, \cdots x_\varkappa) = 0 \\ \varphi_2(x_{\varkappa+2}, x_1, x_2, \cdots x_\varkappa) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_\lambda(x_{\varkappa+\lambda}, x_1, x_2, \cdots x_\varkappa) = 0 \end{cases}$$

die Differentialgleichungen (2) in solche umgeformt werden, welche die unabhängige Variable x_1 besitzen, und die man erhält, indem man

$$\frac{dz}{dx_{\varkappa+\varrho}} = \frac{dz}{dx_1}\,\frac{1}{\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}}, \quad \frac{d^2z}{dx^2_{\varkappa+\varrho}} = \frac{d^2z}{dx_1^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^2} - \frac{dz}{dx_1}\,\frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^3}\,\frac{d^2x_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

bildet, diese Werthe in die ϱ^{te} Gleichung des Systemes (2) einsetzt und zwischen der so erhaltenen Gleichung, der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (4) und den zwischen $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ bestehenden Gleichungen $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ eliminirt; auf diese Weise werden sich statt der Gleichungen (2), wenn man noch eine Zerlegung der Eliminationsresultate durch Hinzunahme der zu x_1 gehörigen algebraischen Irrationalitäten y_1 zulässt, die folgenden Differentialgleichungen ergeben

$$(5) \cdots \begin{cases} \mathfrak{F}_1\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_1}z}{dx_1^{n_1}}\right) = 0 \\ \mathfrak{F}_2\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_2}z}{dx_1^{n_2}}\right) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{F}_\lambda\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_\lambda}z}{dx_1^{n_\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Man sieht unmittelbar, dass jedes Integral $z_{\varkappa+\varrho}$ der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (2) auch ein Integral der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (5) sein wird, indem nach der Entstehungsweise von $\mathfrak{F}$ aus F und der bekannten Formulirung des Eliminationsprocesses die Beziehung statthat:

$$(6) \cdots \mathfrak{F}_\varrho\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_\varrho}z}{dx_1^{n_\varrho}}\right) =$$
$$= \prod F_\varrho\left(x_{\varkappa+\varrho}, y_{\varkappa+\varrho}\, z, \frac{dz}{dx_1}\cdot\frac{1}{\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}}, \frac{d^2z}{dx_1^2}\,\frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^2} - \frac{dz}{dx_1}\,\frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^3}\,\frac{d^2x_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^2}, \cdots\right),$$

worin auf der rechten Seite für $x_{\varkappa+\varrho}$, $y_{\varkappa+\varrho}$ alle durch die gegebenen algebraischen Gleichungen definirten Wurzelwerthe einzusetzen und mit den so entstehenden F_ϱ-Werthen das Product zu bilden ist; jedes z, welches also einen Factor der rechten Seite zu Null macht, wird auch $\mathfrak{F}_\varrho$ verschwinden lassen, und umgekehrt wird jedes z, welches $\mathfrak{F}_\varrho = 0$ macht, auch einen Factor der rechten Seite identisch Null werden lassen — wir finden also, dass jedes Integral der Gleichung $F_\varrho = 0$ auch ein Integral der Gleichung $\mathfrak{F}_\varrho = 0$ sein wird, dass aber umgekehrt — und dies wird für die späteren Schlüsse wichtig — auch jedes Integral von $\mathfrak{F}_\varrho = 0$ der Gleichung $F_\varrho = 0$ genügt, wenn man sich nur im Allgemeinen unter $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ andere Lösungen derselben gegebenen algebraischen Beziehungen denkt, die zwischen diesen Grössen und x_1 stattfinden. Formt man in der eben angegebenen Weise auch die Gleichung (3) um, so dass man erhält

$$(7) \cdots \mathfrak{F}\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1} z_1}{dx_1^{M_1}}, z_{\varkappa+1},\right.$$

$$\left.\frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+1}} z_{\varkappa+1}}{dx_1^{M_{\varkappa+1}}}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+\lambda}} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^{M_{\varkappa+\lambda}}}\right) = 0,$$

und stellt diese Gleichung mit den Gleichungen (5) zusammen, so wird man, wenn man (7) $n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda$ mal, die Gleichungen (5) resp. $M_{\varkappa+1} + n_2 + \cdots + n_\lambda$ mal, $\cdots M_{\varkappa+\lambda} + n_1 + n_2 + \cdots n_{\lambda-1}$ mal nach x_1 differentiirt

$$M_{\varkappa+1} + \cdots + M_{\varkappa+\lambda} + \lambda(n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda) + \lambda + 1$$

Gleichungen erhalten, aus denen die Grössen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ nebst ihren Ableitungen, deren Anzahl

$$M_{\varkappa+1} + \cdots + M_{\varkappa+\lambda} + \lambda(n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda) + \lambda$$

ist, eliminirt werden können. Vor allem muss bemerkt werden, dass diese Elimination in allen Fällen durchführbar ist, da die Gleichung (5) und (7) von einander unabhängig sind; denn was zuerst die Gleichungen (5) selbst angeht, so kommt in jeder derselben nur eine der Grössen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ vor, und da die Differentiation nach x_1 die Beziehung liefert

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial z_{\varkappa+\varrho}} \frac{dz_{\varkappa+\varrho}}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial \left(\dfrac{d^{n_\varrho} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho}}\right)} \frac{d^{n_\varrho+1} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho+1}} = 0,$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial \left(\dfrac{d^{n_\varrho} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho}}\right)}$$

von Null verschieden ist, so wird jede solche durch Differentiation aus einer der Gleichungen (5) entstandene Gleichung eine neue Eliminationsgrösse einführen, und es werden somit die auf diese Weise hergeleiteten Gleichungen von einander unabhängig sein; was endlich die Gleichung (7) betrifft, so kann sie von keiner der eben betrachteten Gleichungen abhängig sein, weil sie die in diesen nicht vorkommende Grösse z_1 und deren Differentialquotienten enthält, und dasselbe gilt von ihren Ableitungsgleichungen, weil diese wieder stets neue Ableitungsgrössen einführen*). Das gewonnene Eliminationsresultat habe die Form

$$(8) \cdots \Phi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1+n_2+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx_1^{M_1+n_1+n_2\cdots+n_\lambda}}\right) = 0,$$

in welche wieder $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ als Parameter eintreten; da aber die erste der Gleichungen (1)

$$(9) \cdots f_1\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1} z}{dx_1^{m_1}}\right) = 0$$

in Bezug auf ihren höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel, ausserdem z_1 ein Integral derselben sein sollte, das nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört, so wird nach dem oben bewiesenen Satze jedes Integral der Gleichung (9) auch ein Integral von (8), oder es wird (9) ein algebraisches Integral der Differentialgleichung (8) von einer bestimmten Ordnung sein müssen. Nehmen wir nun an, dass im Laufe des Eliminationsprocesses nicht mehrere Grössen zugleich herausfallen, oder dass nicht schon aus weniger Gleichungen als den oben angegebenen sich die bezeichneten Grössen eliminiren lassen, so werden sich die letzteren als rationale, im Allgemeinen als algebraische Functionen der Coefficienten der Gleichungen, also der Grössen z_1 und deren Ableitungen ergeben, und es ist ersichtlich, dass, weil das Eliminationsresultat von jedem anderen particulären Integrale z_1' der Differentialgleichung (9) befriedigt wird, die aus jenen algebraischen Functionen durch Substitution von z_1' statt z_1 sich ergebenden Functionalwerthe ebenfalls den Gleichungen (5) und (7) Genüge leisten werden, vorerst freilich nur, ohne Rücksicht auf ihre Eigenschaft als Differentialquotienten, lediglich als Eliminationsgrössen eines algebraischen Gleichungsystems aufgefasst. Ist aber z. B.

$$z_{\varkappa+1} = \chi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda}}\right)$$

*) Die Gleichungen (5) und (7) nebst ihren Ableitungen können sich nicht widersprechen, da sie thatsächlich bestehen.

und

$$\frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1} = \chi_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots \frac{d^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda}}\right),$$

so dass

$$\chi_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots\right) = \frac{d}{dx_1}\chi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots\right)$$

ist, so muss wiederum nach dem oben bewiesenen Satze diese Gleichung auch durch z_1' befriedigt werden, und es werden somit auch die durch Substitution von z_1' statt z_1 hervorgehenden Werthe der Eliminationsgrössen in den resp. Differentialbeziehungen zu einander stehen, d. h. wenn man z_1' statt z_1 und für die $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ die aus den für die Eliminationsgrössen gefundenen Functionalausdrücken durch jene Substitution hervorgehenden Ausdrücke setzt, so werden die Gleichungen (5) und (7) befriedigt werden, oder endlich noch anders ausgedrückt, es werden ein willkürliches particuläres Integral der Gleichung (9) und dazugehörige particuläre Integrale der Gleichungen (5) der Gleichung (7) genügen, d. h. mit ihren dazugehörigen Ableitungen die algebraische Beziehung unverändert lassen, wobei stets $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ als Parameter zu betrachten sind. So wird, um zuerst ein ganz einfaches Beispiel zu nehmen, das particuläre Integral $z_1 = e^x$ der Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = z$ und dessen Ableitung mit dem particulären Integrale $z_2 = e^{2x} + e^x$ der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} + 2z = 0$ in der algebraischen Beziehung stehen

$$z_2 = z_1^2 + \frac{dz_1}{dx},$$

und man sieht unmittelbar, dass, wenn man z_1 durch ce^x, aber z_2 durch das nunmehr bestimmte particuläre Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung $c^2e^{2x} + ce^x$ ersetzt, die algebraische Beziehung unverändert bleibt.

Aber wir haben einige wesentliche Bemerkungen hinzuzufügen. Es war eben bewiesen worden, dass ein willkürliches particuläres Integral von (9) und dazu gehörige particuläre Integrale der Differentialgleichungen (5) die zwischen den Integralen und deren Ableitungen bestehende algebraische Beziehung (7) unverändert lassen; da nun aber früher gezeigt worden, dass jedem Integrale einer der Gleichungen von (5) stets ein Integral der resp. Gleichung von (2) entspricht, wenn man sich nur unter $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ im Allgemeinen andere Lösungen derselben gegebenen algebraischen Beziehungen denkt, die zwischen diesen Grössen und x_1 stattfinden, so können wir auch den eben gefundenen Satz so aussprechen, dass die algebraische Be-

ziehung (3) erhalten bleibt, wenn man für z_1 ein beliebiges anderes particuläres Integral der ersten Gleichung (1) und für $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ bestimmte andere particuläre Integrale der Gleichungen (2) setzt, wenn man nur für $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ Lösungen derselben algebraischen Gleichungen (4), aber im Allgemeinen andere dieser Lösungen genommen denkt, wobei $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ als Parameter zu betrachten sind. Wählen wir zur Erläuterung des eben besprochenen Ueberganges von $x_{\varkappa+\varrho}$ in eine andere Lösung der diese Grösse definirenden algebraischen Gleichung die beiden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{dz}{dx_1}\right)^2 = \frac{1}{1-x_1^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dx_2}\right)^2 = \frac{1}{1-x_2^2},$$

worin x_1 und x_2 von einander unabhängige Variable sein sollen, seien ferner bei fest bestimmten Zeichen von $\sqrt{1-x_1^2}$ und $\sqrt{1-x_2^2}$ zwei Integrale der resp. Differentialgleichungen

$$z_1 = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad z_2 = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und stellen wir endlich mit jenen beiden Differentialgleichungen die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx_3}\right)^2 = \frac{1}{1-x_3^2}$$

zusammen, worin x_3 algebraisch von x_1 und x_2 in der Weise abhängen soll, dass

$$x_3 = x_1 \sqrt{1-x_2^2} + x_2 \sqrt{1-x_1^2}$$

ist mit den für die Wurzelgrössen fest angenommenen Werthen, so wird, wenn ausserdem

$$\sqrt{1-x_3^2} = \sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_2^2} - x_1 x_2$$

gesetzt, und als Integral jener dritten Differentialgleichung

$$z_3 = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gewählt wird, zwischen diesen drei Integralen die algebraische Beziehung bestehen

$$(\text{m}) \cdots\cdots z_3 = z_1 + z_2,$$

und wir wollen nun auf diese Beziehung unsern eben bewiesenen Satz anwenden. Setzt man für z_1 das andere nicht durch eine Constante verschiedene particuläre Integral, das einer Aenderung des Wurzelzeichens entspricht,

$$z_1' = -\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so sieht man, dass, wenn x_2 und z_2 unverändert bleiben, die rechte Seite der algebraischen Beziehung (m), welche erhalten bleiben soll, in $z_1' + z_2$ übergeht; da aber $z_1' = - z_1$ ist, so wird die linke Seite durch eine Grösse z_3' zu ersetzen sein, für welche, wenn wiederum

$$z_3' = \int_0^{x_3'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gesetzt wird, bekanntlich

$$x_3' = x_1\sqrt{1-x_2^2} - x_2\sqrt{1-x_1^2}, \quad \sqrt{1-x_3'^2} = -\sqrt{1-x_1^2}\cdot\sqrt{1-x_2^2} - x_1 x_2$$

sein muss, und wir haben somit dieselbe algebraische Beziehung

$$z_3' = z_1' + z_2,$$

in der z_1' ein anderes particuläres Integral der Differentialgleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$ für dieselbe Variable x_1, und z_3' ein particuläres Integral eben dieser Differentialgleichung für das Argument x_3' bedeutet, welches sich als Lösung derselben algebraischen Gleichung ergiebt, welche x_3 mit x_1 und x_2 verband. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir in der Beziehung $z_3 = z_1 + z_2$ die Variable x_1 die Punkte $+1$ oder -1 umkreisen lassen.

Wir werden später die Frage zu erörtern haben, unter welchen Umständen die Werthe $x_{\varkappa+\varrho}$ in dieselben Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergehen, und also unverändert bleiben, gehen aber jetzt erst in der allgemeinen Auseinandersetzung weiter.

Lässt man in der oben erhaltenen algebraischen Beziehung (3), in welcher $z_1, z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ durch $z_1', z_{\varkappa+1}', \cdots z_{\varkappa+\lambda}'$ ersetzt sind, während $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ im Allgemeinen in andere Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergegangen sind, nunmehr das unverändert gebliebene Integral z_2 in ein beliebiges anderes particuläres Integral der zweiten Differentialgleichung (1) übergehen, während $z_1', z_3, \cdots z_\varkappa$ unverändert bleiben, so wird man wieder aus den vorher angegebenen Gründen die Integrale $z_{\varkappa+1}', \cdots z_{\varkappa+\lambda}'$ durch andere particuläre Integrale des Systems (2) zu ersetzen haben, wobei wieder die unabhängigen Variabeln dieser Integrale in andere Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergehen können. Schliessen wir so weiter, so finden wir, dass die algebraische Beziehung (3) erhalten bleibt, wenn man für $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$ *beliebige* andere particuläre Integrale der Differentialgleichungen (1), für $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ *bestimmte* andere particuläre Integrale der Differentialgleichungen (2) setzt, wobei die Variabeln $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ im Allgemeinen in andere Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergehen werden — immer vorausgesetzt, dass der

oben vorgenommene Eliminationsprocess für die Eliminationsgrössen bestimmte algebraische Functionen der Coefficienten jener Gleichungen liefert, d. h. bei der Elimination nicht mehrere der zu eliminirenden Grössen zugleich herausfallen. Dass dies in der That der Fall sein kann, geht aus folgendem Beispiel hervor: Die Differentialgleichung $(\alpha)\ \frac{dz}{dx} = z$ hat das particuläre Integral $z_1 = e^x$, die Differentialgleichung

$$(\beta) \cdots \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}(2x-1) - 2z(x-1) = 0$$

das particuläre Integral

$$z_2 = e^{-x^2}\int e^{x^2+x}dx,$$

so dass zwischen diesen beiden Integralen die Beziehung besteht

$$(\gamma) \cdots \frac{dz_2}{dx} + 2xz_2 = z_1;$$

differentiirt man nun (β) einmal, und (γ) zweimal, so erhält man

$$(\delta) \cdots \frac{d^3z_2}{dx^3} + \frac{d^2z_2}{dx^2}(2x-1) - 2\frac{dz_2}{dx}(x-2) - 2z_2 = 0,$$

$$(\varepsilon) \cdots \frac{d^2z_2}{dx^2} + 2x\frac{dz_2}{dx} + 2z_2 = \frac{dz_1}{dx},$$

$$(\zeta) \cdots \frac{d^3z_2}{dx^3} + 2x\frac{d^2z_2}{dx^2} + 4\frac{dz_2}{dx} = \frac{d^2z_1}{dx^2};$$

eliminirt man ferner $\frac{d^3z_2}{dx^3}$ aus (δ) und (ζ), so folgt

$$(\eta) \cdots \frac{d^2z_2}{dx^2} + 2x\frac{dz_2}{dx} + 2z_2 = \frac{d^2z_1}{dx^2},$$

und stellt man nunmehr (η) mit (ε) zusammen, so ergiebt sich

$$\frac{d^2z_1}{dx^2} = \frac{dz_1}{dx},$$

oder verbindet man dieselbe mit (β), so folgt

$$\frac{dz_2}{dx} + 2xz_2 = \frac{d^2z_1}{dx^2},$$

welche wiederum mit (γ) verbunden

$$\frac{d^2z_1}{dx^2} = z_1$$

liefert, ohne z_2 und dessen Ableitung als algebraische Function von z_1 und den Ableitungen dieser Grösse auszudrücken; in der That kann z_2 nicht algebraisch durch $z_1 = e^x$ ausgedrückt werden; setzt man in (γ) für z_2 cz_2, so ist auch z_1 durch cz_1 zu ersetzen, wenn dagegen statt z_2 das andere Fundamentalintegral von (β), nämlich e^{-x^2}, substituirt wird, so muss z_1 gleich 0 gesetzt werden.

Um somit die allgemeine Gültigkeit des oben ausgesprochenen Satzes zu erweisen, müssen wir den Eliminationsprocess selbst genauer verfolgen, und es wird genügen den Gang des Beweises für Systeme von Differentialgleichungen durchzuführen, welche nur aus je einer Gleichung bestehen; sei eine Differentialgleichung

$$(10) \cdots\cdot f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

gegeben, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten irreductibel sein soll, und mögen eins ihrer particulären Integrale z_1, das nicht schon das Integral einer Differentialgleichung niederer Ordnung ist, und dessen Ableitungen mit einem particulären Integrale z_2 der Differentialgleichung

$$(11) \cdots\cdot \frac{d^n z}{dx^n} = \mathfrak{F}\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right)$$

und den Ableitungen desselben in der algebraischen Beziehung stehen:

$$(12) \cdots\cdot \frac{d^{n+\varrho} z_2}{dx^{n+\varrho}} = \varphi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n+\varrho-1} z_2}{dx^{n+\varrho-1}}\right),$$

worin ϱ eine positive oder negative ganze Zahl, 0 eingeschlossen, bedeuten soll. Ist $\varrho = 0$ oder positiv ganz, so ersetze man in der letzten Gleichung vermöge (11) und deren Differentialquotienten alle Ableitungen von einer höheren Ordnung als der $n-1^{\text{ten}}$ durch die niedrigeren, so dass die Gleichung (12) die Form annimmt

$$(13) \cdots\cdot \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} = \Phi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2 \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}}\right),$$

und somit ist auch dieser Fall reducirt auf denjenigen, in welchem die Grösse ϱ der Gleichung (12) eine negative Zahl $= -1$ ist, so dass wir allgemein die Gleichung (12) ersetzen können durch

$$(14) \cdots\cdot \frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}} = \Phi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right),$$

worin α eine positive ganze Zahl bedeutet.

Differentiirt man die Gleichung (14) α-mal nach einander, so folgt

$$\frac{d^{n-\alpha+1} z_2}{dx^{n-\alpha+1}} = \Phi_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}}\right), \cdots$$

$$\cdots \frac{d^n z_2}{dx^n} = \Phi_\alpha\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}\right),$$

und somit nach (11) die Beziehung:

$$(15) \cdots\cdot \Phi_\alpha\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}\right) =$$

$$= \mathfrak{F}\left(x, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}\right).$$

Setzt man in diese Gleichung die aus den Beziehungen (14) und den durch Differentiation abgeleiteten hervorgehenden Werthe von

$$\frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}}, \quad \frac{d^{n-\alpha+1} z_2}{dx^{n-\alpha+1}}, \ldots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}$$

ein, so mag dieselbe übergehen in

$$(16) \ldots \frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}} = \Psi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right),$$

worin $\beta < \alpha - 1$ ist, und bildet man wieder durch successive Differentiation

$$\frac{d^{n-\beta+1} z_2}{dx^{n-\beta+1}} = \Psi_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}}\right), \ldots$$

$$\ldots \frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}} = \Psi_{\beta-\alpha}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right) = 0,$$

so folgt aus der letzten dieser Gleichungen und der Gleichung (14):

$$(17) \ldots \Psi_{\beta-\alpha}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right) =$$

$$= \Phi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right);$$

setzt man wiederum in diese Gleichung die aus (16) und den abgeleiteten Gleichungen entnommenen Werthe von

$$\frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}}, \quad \frac{d^{n-\beta+1} z_2}{dx^{n-\beta+1}}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}},$$

so erhält man

$$(18) \ldots \frac{d^{n-\gamma} z_2}{dx^{n-\gamma}} = X\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\gamma-1} z_2}{dx^{n-\gamma-1}}\right),$$

worin $\gamma \leq \beta - 1$; bildet man endlich hieraus wieder

$$\frac{d^{n-\gamma+1} z_2}{dx^{n-\gamma+1}} = X_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\gamma} z_2}{dx^{n-\gamma}}\right), \ldots$$

$$\ldots \frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}} = X_{\gamma-\beta}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right),$$

so folgt

$$(19) \ldots X_{\gamma-\beta}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right) =$$

$$= \Psi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right),$$

woraus durch Einsetzen der Werthe (18) und der durch Differentiation abgeleiteten alle Werthe z_2 und deren Ableitungen herausfallen

mögen, so dass sich als Eliminationsresultat eine Beziehung ergiebt:

$$(20) \cdots\cdot f_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2z_1}{dx^2}, \cdots\right) = 0,$$

dann wird der eben vollzogene Eliminationsprocess der allgemeinsten Annahme entsprechen. So folgt in dem oben behandelten Beispiel durch Differentiation von (γ)

$$\frac{d^2z_2}{dx^2} + 2x\frac{dz_2}{dx} + 2z_2 = \frac{dz_1}{dx}$$

und durch Identificiren des zweiten Differentialquotienten aus dieser Gleichung und der Gleichung (β):

$$\frac{dz_2}{dx} + 2xz_2 = \frac{dz_1}{dx},$$

woraus sich schon durch Gleichsetzen der Werthe von $\frac{dz_2}{dx}$ aus der zuletzt erhaltenen und der Gleichung (γ)

$$\frac{dz_1}{dx} = z_1$$

ergiebt.

Wir haben der Kürze halber diesmal immer nur mit einem Zweige der einzelnen hier auftretenden algebraischen Functionen operirt — es bedarf kaum der Erwähnung, dass, um die zugehörigen rationalen Formen zu substituiren, man immer nur das Product der einzelnen irrationalen algebraischen Ausdrücke zu bilden hat — es wird also auch die Gleichung (20) eine irrationale algebraische sein; da dieselbe aber rational gemacht in Folge der für die Gleichung (10) und deren Integral z_1 gemachten Voraussetzung durch alle Integrale dieser letzteren befriedigt würde, z_1 aber dem Zweige (20) dieser rational gemachten Gleichung genügt, so werden auch andere particuläre Integrale von (10) z. B. z_1' Integrale von (20) sein; sei nun z_2' ein particuläres Integral der im Allgemeinen nicht algebraischen Differentialgleichung (18), nachdem in derselben z_1 durch z_1' ersetzt ist, so werden auch die daraus abgeleiteten Gleichungen gelten, und da die Gleichung (19) nichts anderes ist als die Gleichung (20), wenn die Werthe der einzelnen Ableitungen substituirt worden sind, die Gleichung (20) aber für z_1' bestehen bleibt, so wird auch (19) für diese Integrale z_1' und z_2' bestehen, d. h. es wird (16) für eben diese Integrale befriedigt werden. Daraus folgt aber wiederum die Gültigkeit der aus dieser durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen, und da (17) erfüllt ist — denn (17) ist nichts anderes als (18) vor Einsetzen der eben bezeichneten Ableitungswerthe — so folgt daraus wieder, dass auch (14) befriedigt ist, wenn z_1 und z_2 durch z_1' und z_2' ersetzt werden. Da endlich (14) und die Ableitungen dieser Gleichung die in den neuen Integralen richtige Gleichung (16) also auch (15)

liefern, so folgt, dass auch (11) befriedigt sein muss, wenn z oder z_2 durch z_2' ersetzt wird, d. h. z_2' ist ein Integral der Differentialgleichung (11), und es findet zwischen dem particulären Integrale z_1' der Differentialgleichung (10) und dem particulären Integrale z_2' der Differentialgleichung (11) und den Ableitungen dieser Grössen wieder die algebraische Beziehung (14) statt, was wir eben feststellen wollten.

Fassen wir die jetzt gewonnenen Resultate zusammen, so folgt das nachstehende Theorem, das die Grundlage der folgenden Untersuchungen bilden wird:

I. *Besteht zwischen particulären Integralen von in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichungen und zwar solchen Integralen, welche gleichartigen Differentialgleichungen niederer Ordnung nicht genügen, und particulären Integralen algebraischer Differentialgleichungen, deren unabhängige Variabeln zu denen des ersten Systems in algebraischer Beziehung stehen, und deren Ableitungen eine algebraische Relation, so bleibt diese bestehen, wenn man für die ersteren Integrale beliebige andere particuläre Integrale jenes Systems setzt, wenn man nur für die Integrale des zweiten Systems passende particuläre Integrale dieses Systems substituirt.*

Dieser Satz gilt natürlich in jedem Falle, wenn das erste System von Gleichungen aus irreductibeln Differentialgleichungen besteht.

Machen wir, bevor wir auf eine weitere Untersuchung, die eine Praecisirung des eben ausgesprochenen Satzes betrifft, eingehen, eine einfache Anwendung desselben auf die Feststellung der allgemeinsten algebraischen Beziehung, welche zwischen den particulären Fundamentalintegralen einer irreductibeln homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und deren Ableitungen besteht.

Nehmen wir zuerst an, dass die Ableitung nur *eines* Fundamentalintegrales in dieselbe eingeht, die Relation also von der Form ist

$$(21) \cdots\cdot \quad z_2 = f(x, z_1, z_1'),$$

so wird nach dem eben bewiesenen Satze, der in diesem Falle in jedem Systeme nur eine und zwar dieselbe Differentialgleichung enthält, z_1 durch $\mu_1 z_1$ ersetzt werden dürfen, wenn man nur $m_1 z_1 + m_2 z_2$ statt z_2 substituirt, worin m_1 und m_2 von der willkürlichen Constanten μ_1 abhängige Constanten bedeuten, also

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')$$

oder

$$(22) \cdots\cdot \quad m_1 z_1 + m_2 f(x, z_1, z_1') = f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1').$$

Da aber die Differentialgleichung zweiter Ordnung irreductibel sein sollte, also z_1 nicht die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung sein darf, so muss die Gleichung (22) eine in z_1 und z_1' identische sein für jedes μ_1; differentiirt man daher dieselbe nach z_1

und z_1', so folgt

$$\mu_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1} = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1}$$

$$\mu_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1'} = m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1'},$$

und da die Differentiation nach μ_1

$$z_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1} + z_1' \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1'} = z_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} + f(x, z_1, z_1') \frac{dm_2}{d\mu_1}$$

giebt, so folgt mit Benutzung der eben erhaltenen Gleichungen

$$(23) \cdots\cdot z_1 \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1} + z_1' \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1'} = af(x, z_1, z_1') + bz_1,$$

worin a und b Constanten bedeuten. Da diese Gleichung wiederum eine in z_1 und z_1' identische sein muss, so können wir sie als eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den beiden unabhängigen Variabeln z_1 und z_1' und der abhängigen $f(x, z_1, z_1')$ betrachten und erhalten zum Zwecke der Integration das System gleichzeitiger totaler Differentialgleichungen

$$\frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_1'}{z_1'} = \frac{df}{af + bz_1},$$

deren vollständige Integrale

$$z_1' = \alpha z_1, \; f = \beta z_1^a - \frac{b}{a-1} z_1$$

sind, und man findet daher als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung (23)

$$(24) \cdots\cdot f(x, z_1, z_1') = z_1^a \varphi\left(\frac{z_1'}{z_1}\right) - \frac{b}{a-1} z_1,$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function bedeutet, in welche die unabhängige Variable x beliebig eintreten darf; setzt man diesen Ausdruck in (22) ein, so folgt leicht, dass

$$m_2 = \mu_1^a, \; m_1 = \frac{b\mu_1}{a-1}\left(\mu_1^{a-1} - 1\right)$$

ist, und man erkennt aus der Bedeutung von a und b nach Gleichung (23) unmittelbar, dass sie numerische d. h. nicht von μ_1 abhängige Constanten vorstellen, da die Function $f(x, z_1, z_1')$ die Grösse μ_1 nicht enthält; es ist somit die allgemeinste Beziehung (21) in der Form enthalten:

$$(25) \cdots\cdot z_2 = z_1^a \varphi\left(\frac{z_1'}{z_1}\right) - \frac{b}{a-1} z_1.$$

Sollen endlich in der algebraischen Beziehung die Ableitungen der beiden Fundamentalintegrale vorkommen, also

$$(26) \cdots\cdot z_2' = f(x, z_1, z_2, z_1')$$

sein, so darf angenommen werden, dass nicht schon zwischen den

beiden Integralen und einer der Ableitungen eine algebraische Relation stattfinde, weil wir sonst auf das vorige Problem zurückgeführt werden; ersetzt man in (26) z_1 durch $\mu_1 z_1$, also z_2 durch $m_1 z_1 + m_2 z_2$, worin μ_1 eine willkürliche, m_1 und m_2 von dieser abhängige Constanten bedeuten, so folgt

$$(27) \cdots\cdot\; m_1 z_1' + m_2 f(x, z_1, z_2, z_1') = f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1'),$$

und da diese Gleichung der Annahme gemäss eine in z_1, z_2, z_1' identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach diesen Grössen

$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1} \mu_1 + \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial (m_1 z_1 + m_2 z_2)} m_1 = m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_2, z_1')}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial (m_1 z_1 + m_2 z_2)} m_2 = m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_2, z_1')}{\partial z_2}$$

$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1'} \mu_1 = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_2, z_1')}{\partial z_1'},$$

und differentiirt man (27) nach μ_1, so ergiebt sich mit Hülfe der eben erhaltenen Relationen, wenn $f(x, z_1, z_2, z_1') = f$ gesetzt wird:

$$\frac{m_2}{\mu_1} z_1 \frac{\partial f}{d z_1} - \frac{m_1}{\mu_1} z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(z_1 \frac{\partial m_1}{\partial \mu_1} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial \mu_1}\right) + \frac{m_1}{\mu_1} z_1' + \frac{m_2}{\mu_1} z_1' \frac{\partial f}{\partial z_1'} = z_1' \frac{\partial m_1}{\partial \mu_1} + f \frac{\partial m_2}{\partial \mu_1}$$

oder

$$(28) \cdots\cdot\; z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + (a z_1 + b z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} + z_1' \frac{\partial f}{\partial z_1'} = A z_1' + B f,$$

worin a, b, A, B Constanten bedeuten. Das zugehörige System totaler Differentialgleichungen

$$\frac{d z_1}{z_1} = \frac{d z_2}{a z_1 + b z_2} = \frac{d z_1'}{z_1'} = \frac{d f}{A z_1' + B f}$$

liefert die Integrale

$$z_1' = \alpha z_1, \quad z_2 = \beta z_1^b - \frac{a z_1}{b-1}, \quad f = \gamma z_1'^B - \frac{A z_1'}{B-1},$$

und somit das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (28) wegen $f = z_2'$

$$(29) \cdots\cdot\; z_2' = z_1'^B \varphi\left\{\frac{z_1'}{z_1}, \left(z_2 + \frac{a z_1}{b-1}\right) z_1^{-b}\right\} - \frac{A z_1'}{B-1},$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function bedeutet, in welche auch die unabhängige Variable x algebraisch eintreten darf, während, wie man wieder leicht durch Einsetzen in (27) sieht, a, A, b, B Constanten sind, von denen die beiden letzten rationale Zahlen sein müssen. Hiermit *ist die Form der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ge-*

funden. Bekanntlich besteht für jede solche Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0,$$

wenn P das logarithmische Differential einer algebraischen Function $f(x)$ ist, die Beziehung

$$(30) \cdots\cdot z_1 z_2' - z_2 z_1' = \frac{c}{f(x)},$$

und in der That erhält man, wenn in (29)

$$A = a = 0, \quad B = b = -1$$

gesetzt wird,

$$z_2' = \frac{1}{z_1'} \varphi\left\{\frac{z_1'}{z_1}, z_1 z_2\right\},$$

so dass, wenn die willkürliche Function

$$\varphi(t, u) = t^2 u + \frac{ct}{f(x)}$$

angenommen wird, sich

$$z_2' = \frac{1}{z_1'}\left[\frac{z_1'^2}{z_1^2} z_1 z_2 + \frac{cz_1'}{f(x)z_1}\right] = \frac{z_1'}{z_1} z_2 + \frac{c}{f(x)z_1}$$

oder

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = \frac{c}{f(x)}$$

ergiebt*).

Nachdem eine Anwendung des oben bewiesenen Satzes behandelt worden, gehen wir wieder zu demselben zurück, um noch einen wesentlichen Punkt zu erledigen, der oben bereits angedeutet war; es ist dort bei der Transformation des Gleichungssystems (2) in das System (5) hervorgehoben worden, dass jedes Integral von (2)

---

*) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht etwa stets reductibel werden muss, wenn P das logarithmische Differential einer algebraischen Function bedeutet, wie z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + z = 0$$

zeigt, deren Fundamentalintegrale bekanntlich

$$z_1 = \int_0^\pi e^{ix\cos w}\, dw \quad \text{und} \quad z_2 = \int_0^\pi e^{ix\cos w} \log(x \sin^2 w)\, dw$$

sind und sich nicht als Integrale einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung darstellen lassen. Uebrigens mag bemerkt werden, dass der oben gefundene Ausdruck (29) für die allgemeinste Relation zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren ersten Ableitungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung nur die Voraussetzung erforderte, dass die beiden Fundamentalintegrale nicht schon Differentialgleichungen erster Ordnung genügen oder selbst algebraisch sind.

auch ein Integral von (5) ist, dass aber auch das Umgekehrte der Fall ist, wenn man sich nur im Allgemeinen unter $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ andere Lösungen derselben gegebenen algebraischen Beziehungen denkt, die zwischen diesen Grössen und x_1 stattfinden, und demgemäss waren auch in dem oben ausgesprochenen Theorem bei der Substitution der neuen particulären Integrale die unabhängigen Variabeln der Integrale des zweiten Systems von Differentialgleichungen im Allgemeinen andere Lösungen der gegebenen algebraischen Beziehungen. Fragen wir jetzt, wann die $x_{\varkappa+\varrho}$ dieselben Lösungen bleiben; denken wir uns oben bei der Transformation der Differentialgleichungen (2) und der angenommenen algebraischen Beziehung (3) in Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln x_1 nach Einsetzen der Werthe für

$$\frac{dz}{dx_{\varkappa+\varrho}}, \frac{d^2z}{dx^2_{\varkappa+\varrho}}, \cdots, \text{ durch } \frac{dz}{dx_1}, \frac{d^2z}{dx_1^2}, \cdots$$

ausgedrückt, die Grössen $x_{\varkappa+\varrho}$ nicht herausgeschafft und nun den oben besprochenen Eliminationsprocess ausgeführt, so wird die resultirende Differentialgleichung in $z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}, \cdots$ ausser x_1 noch $x_{\varkappa+1}$, $x_{\varkappa+2}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ in rationaler Form in ihren Coefficienten enthalten und mag mit

$$(31) \cdots \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}, \cdots\right) = 0$$

bezeichnet werden. Diese Gleichung enthält also die durch algebraische Irrationalitäten ausgedrückten Functionen $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ der Variabeln x_1, und wir wissen aus Früherem, dass, wenn wir die Gleichung (31) in x_1 rational machen würden, alle Lösungen der in z_1 gegebenen Differentialgleichung

$$(32) \cdots f_1\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}\right) = 0,$$

welche den früher angegebenen Beschränkungen unterliegt, auch Lösungen der rational gemachten Gleichung (31) sein werden. Berechnet man aus (32)

$$\frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}} = \psi_1\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right), \cdots$$

$$\cdots \frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}} = \psi_\lambda\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right)$$

unter der Voraussetzung, dass (32) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten irreductibel und vom λ^{ten} Grade ist, und bildet

daraus durch Differentiation

$$\frac{d^{m_1+1} z_1}{dx_1^{m_1+1}} = \chi_1\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right), \dots$$

$$\dots \frac{d^{m_1+1} z_1}{dx_1^{m_1+1}} = \chi_\lambda\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right),$$

. . . .

setzt diese Werthe in die Gleichung (31) ein, und multiplicirt die sich so ergebenden λ Werthe der φ — Function, so erhält man

$$(33) \dots \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}, \psi_1, \chi_1, \dots\right) \times$$

$$\dots \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}, \psi_\lambda, \chi_\lambda, \dots\right),$$

und die linke Seite dieser Gleichung ist rational in $z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$, da sie das Eliminationsresultat der höheren Ableitungen von z_1 als von der $m_1 - 1^{\text{ten}}$ Ordnung zwischen den Gleichungen (31) und (32) darstellt; bezeichnen wir diese Gleichung durch

$$(34) \dots \Psi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right) = 0,$$

oder durch

$$(35) \dots \Sigma P z_1^{\alpha} \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^{\beta} \left(\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\right)^{\gamma} \dots \left(\frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right)^{\mu} = 0,$$

worin P eine ganze rationale Function von $x_1, x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ bedeutet, so würde sie nach Wegschaffung der algebraischen Irrationalitäten $x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$, da sie nur von der $m_1 - 1^{\text{ten}}$ Ordnung ist und das Integral z_1 besitzt, eine für alle Werthe von

$$z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \dots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$$

identische sein müssen. Fassen wir nunmehr die Functionen $x_{\varkappa+1}, \dots x_{\varkappa+\lambda}$ von x_1 auf, denken uns alle Verzweigungspunkte derselben verzeichnet, bilden alle Werthecombinationen dieser Grössen, welche die Umläufe von x_1 um diese einzelnen Verzweigungspunkte erzeugen und setzen alle diese Werthecombinationen in $\Psi = 0$ oder in die Grössen P der Gleichung (35) ein, so wird, wenn die so hervorgehenden Werthe von Ψ durch $\Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_\nu$ bezeichnet werden, das Product

$$(36) \dots \Psi \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2 \dots \Psi_\nu = 0$$

gesetzt offenbar in x_1 rational sein, da für jeden Umlauf um einen

Verzweigungspunkt die P der einen Summe Ψ_α in die P der anderen Summe Ψ_β übergehen, und somit (36) der oben gemachten Bemerkung gemäss für beliebige Werthe von $z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ identisch gleich Null sein müssen. Wenn aber für ein beliebig gewähltes Werthesystem die linke Seite von (36) verschwinden soll, so muss jedenfalls eins der Ψ für unendlich viele Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ Null werden d. h. es müssen die entsprechenden Coefficienten P für jedes x_1 Null sein; da aber die P des einen Ψ in die P des andern Ψ übergehen, wenn man x_1 alle Umläufe um jene Verzweigungspunkte machen lässt, so werden also auch die P eines jeden Ψ Null sein, somit jedes Ψ für beliebige Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ verschwinden, und daher auch die Gleichung (34) oder (33) für beliebige Werthe der eben bezeichneten Grössen bestehen. Die einzelnen φ-Functionen der Gleichung (33) waren nun aus der Eliminationsgleichung (31) entstanden, indem man die Gleichung (32), welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten als irreductibel vorausgesetzt war, nach $\frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}$ auflöste, die successiven Ableitungen bildete und in (32) einsetzte; da nun (33) für beliebige Werthe von $z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ verschwinden musste, so wird jedenfalls einer der Factoren, also eine der φ-Functionen für beliebige Werthe dieser Grössen identisch Null sein; ist man nun im Stande, in der nach der höchsten Ableitung aufgelösten Gleichung (32) durch geschlossene Umläufe der Grössen $z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ zu allen Auflösungen $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_\lambda$ zu gelangen, oder was dasselbe aussagt, *ist die Gleichung* (32) *in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel mit Adjunction der Grössen* $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$, dann wird das Verschwinden irgend einer der λ φ-Functionen das Verschwinden einer jeden anderen dieser Functionen nach sich ziehen; daraus folgt dann, dass für jedes particuläre Integral der Differentialgleichung (32) auch die Gleichung (31) mit Beibehaltung der Werthe $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ befriedigt sein wird, d. h. *das Eliminationsresultat bestehen bleibt für jedes Integral der Gleichung* (32) — anders ausgedrückt, *es werden in dem oben ausgesprochenen allgemeinen Satze von der Erhaltung der algebraischen Relation in den eben bezeichneten Fällen die unabhängigen Variabeln der zu substituirenden particulären*

Integrale des zweiten Systems ihre Werthe behalten. Offenbar wird dies nach den obigen Auseinandersetzungen stets der Fall sein, wenn die Differentialgleichungen (1) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten vom ersten Grade sind, also jedenfalls für lineare Differentialgleichungen.

Wir wollen nunmehr einen zweiten Satz von der Erhaltung einer algebraischen Beziehung beweisen, von dem wir gleich nachher eine Reihe von Anwendungen machen wollen.

Seien wiederum die zwei Systeme von Differentialgleichungen (1) und (2) gegeben, über die wir jedoch fürs erste noch gar keine Voraussetzung machen, und bestehe auch jetzt zwischen einzelnen particulären Integralen derselben und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung (3), so stelle man die erste Gleichung von (1) mit der Beziehung (3) zusammen, und eliminire, indem man die erstere M_1-mal, die letztere m_1-mal nach x_1 differentiirt, aus den so entstehenden, von einander unabhängigen $M_1 + m_1 + 2$ Gleichungen die Grössen

$$z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2 z_1}{dx_1^2}, \cdots \frac{d^{M_1+m_1} z_1}{dx_1^{M_1+m_1}},$$

indem $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ wieder als Parameter betrachtet, und die Differentialquotienten der Grössen $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ nach x_1 genommen in solche nach $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ genommen verwandelt werden; es ergiebt sich sodann eine Differentialgleichung von der Form

$$(37) \quad \cdots \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_{\varkappa+1} \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+1}+m_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{M_{\varkappa+1}+m_1}}, \cdots \right.$$
$$\left. \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+\lambda}+m_1} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{M_{\varkappa+\lambda}+m_1}}\right) = 0,$$

aus der wir vermöge der Gleichungen (2) die Differentialquotienten von $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$, welche resp. von einer höheren Ordnung als der $n_1, \cdots n_\lambda^{\text{ten}}$ sind, eliminiren können. Nehmen wir an, dass die Gleichungen (2), als algebraische Gleichungen in dem höchsten Differentialquotienten aufgefasst, irreductibel sind, und sich aus ihnen

$$\frac{d^{n_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}} = \varphi_{11}\left(x_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+1}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1-1}}\right), \cdots$$
$$\cdots \frac{d^{n_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}} = \varphi_{\mu 1}\left(x_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+1}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1-1}}\right),$$
$$\frac{d^{n_1+1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1+1}} = \chi_{11}, \cdots \frac{d^{n_1+1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1+1}} = \chi_{\mu 1}, \cdots$$

ebenso

$$\frac{d^{n_2} z_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}^{n_2}} = \varphi_{12}\left(x_{\varkappa+2}, z_{\varkappa+2}, \frac{dz_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}}, \cdots \frac{d^{n_2-1} z_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}^{n_2-1}}\right), \cdots \frac{d^{n_2} z_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}^{n_2}} =$$

$$\frac{d^{n_2+1} z_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}^{n_2+1}} = \chi_{12}, \cdots \frac{d^{n_2+1} z_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}^{n_2+1}} = \chi_{\nu 2}, \cdots$$

u. s. w. ergiebt, so wird das gesuchte Eliminationsresultat in der Form dargestellt werden können

$$(38) \cdots \prod_{\alpha, \cdots \varrho} \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_{\varkappa+1}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1-1}}, \varphi_{\alpha 1}, \chi_{\alpha 1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{n_\lambda-1} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{n_\lambda-1}}, \varphi_{\varrho\lambda}, \chi_{\varrho\lambda} \cdots\right) = 0.$$

Unterwerfen wir nun die Differentialgleichungen (2) der weiteren Beschränkung, dass zwischen ihren particulären Integralen $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ und deren Ableitungen bis zur resp. $n_1 - 1^{\text{ten}}$, $n_2 - 1^{\text{ten}}$, $\cdots n_\lambda - 1^{\text{ten}}$ Ordnung keine algebraische Beziehung stattfinde, so muss die Gleichung (38) nothwendig eine in all diesen Grössen identische sein, d. h. es muss Π für beliebige Werthe dieser Grössen verschwinden. Nun ist aber vermöge der angenommenen algebraischen Irreductibilität der Functionen $\varphi, \chi, \cdots$ wiederum ersichtlich, dass, wenn in jenem Π-Producte ein Factor verschwindet, jeder derselben Null werden muss, und wenn wir somit willkürliche andere particuläre Integrale des Systems von Differentialgleichungen (2) herausgreifen, so wird nach schon wiederholt dagewesenen Schlüssen durch dieselben auch die Gleichung (37) befriedigt werden; daraus folgt aber wieder genau wie oben, dass zu jeder willkürlichen Wahl von $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ als Integralen ihrer resp. Differentialgleichungen ein Integral der Differentialgleichung (1) gehören wird, welches mit den anderen und deren Ableitungen in derselben algebraischen Beziehung (3) stehen, und worin die Variable x_1 stets wieder durch dieselben algebraischen Gleichungen (4) mit den Grössen $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ verbunden sein wird; dasselbe gilt für die Integrale der übrigen Gleichungen (1), und es mag nur noch bemerkt werden, dass die aufgestellte Bedingung der algebraischen Irreductibilität der Gleichungen (2) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten und die Annahme, dass eine Gleichung von der Form (38) nicht bestehen darf, also $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ auch nicht Integrale von algebraischen Differentialgleichungen niederer Ordnung als der resp. $n_1, n_2 \cdots n_\lambda^{\text{ten}}$ sein dürfen,

von im oben angegebenen Sinne irreductiblen Differentialgleichungen erfüllt sein kann. Fassen wir die nunmehr gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

II. Besteht zwischen particulären Integralen der beiden Systeme von Differentialgleichungen (1) *und* (2) *und den Ableitungen derselben eine algebraische Beziehung, und sind die Differentialgleichungen des zweiten Systems nicht nur der Bedingung unterworfen, dass sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sind, sondern dass auch keine algebraische Relation zwischen den in Betracht kommenden particulären Integralen und deren Ableitungen bis zu einer Ordnung hin, die um eine Einheit kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung ist, bestehe, so bleibt die algebraische Beziehung erhalten, wenn man statt der Integrale des Systemes* (2) *beliebige andere particuläre Integrale setzt, vorausgesetzt, dass statt der Integrale des Systemes* (1) *passende Integrale substituirt werden, wobei die unabhängigen Variablen beider Systeme durch dieselben algebraischen Gleichungen* (4) *mit einander verbunden bleiben.*

Wir heben den folgenden speciellen Fall hervor, der häufige Anwendung finden wird:

Besteht zwischen dem Integrale irgend einer Differentialgleichung und nicht algebraischen particulären Integralen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, welche in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sind, irgend eine algebraische Beziehung, und findet zwischen den letzteren Integralen nicht schon selbst ein algebraischer Zusammenhang statt, so wird die algebraische Beziehung erhalten bleiben, wenn man für die Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung beliebige particuläre Integrale setzt, wenn man nur für das Integral der Differentialgleichung beliebiger Ordnung ein passendes particuläres Integral substituirt.

Es ist nicht nöthig, an dieser Stelle auf eine Ausdehnung der beiden aufgestellten Sätze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung auf den Fall näher einzugehen, in welchem die Systeme von Differentialgleichungen die abhängigen Variabeln $z_1, \cdot\cdot z_\varkappa, z_{\varkappa+1} \cdot\cdot z_{\varkappa+\lambda}$ nicht getrennt enthalten, sondern gleichzeitige totale Differentialgleichungen darstellen; man sieht ohne Schwierigkeit, in welcher Weise diese Sätze, die ganz allgemein gelten, zu generalisiren sind, und es soll im Folgenden nun eine Reihe von Anwendungen dieser Sätze auf verschiedene Fragen der Analysis gegeben werden.

§ 6.

Algebraische Beziehungen zwischen Abel'schen Integralen und Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen; Beziehungen zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen.

Seien die Differentialgleichungen gegeben

$$(39) \cdots \frac{dz}{dx} = y_1, \quad \frac{dz}{dx} = y_2, \cdots \frac{dz}{dx} = y_\lambda,$$

in denen $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ algebraische Functionen bedeuten, und welche nicht algebraisch integrirbar sein sollen, so soll die Frage nach der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen den Integralen dieser Differentialgleichungen

$$z_1 = \int y_1 dx, \quad z_2 = \int y_2 dx, \cdots z_\lambda = \int y_\lambda dx$$

aufgeworfen werden, welche wir in der irreductibeln algebraischen Form

$$(40) \cdots z_1 = \varphi(x, z_2, z_3, \cdots z_\lambda)$$

zu Grunde legen wollen. Nehmen wir an, dass nicht schon $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ in einem algebraischen Zusammenhange stehen — in welchem Falle dann diese Relation als zu untersuchende Elementarbeziehung zu Grunde gelegt würde — so werden wir nach dem Satze II des vorigen Paragraphen für irgend eines der Integrale $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ ein beliebiges anderes particuläres Integral der entsprechenden Differentialgleichung setzen dürfen, wenn nur für z_1 ein passendes Integral substituirt wird; man erhält somit

$$z_1 + m = \varphi(x, z_2, z_3, \cdots z_{\lambda-1}, z_\lambda + \mu),$$

worin μ eine willkürliche, m eine von μ abhängige Constante bedeutet, oder kürzer geschrieben

$$(41) \cdots z_1 = \Phi(z_\lambda) \quad \text{und} \quad z_1 + m = \Phi(z_\lambda + \mu)$$

also

$$(42) \cdots \Phi(z_\lambda + \mu) = \Phi(z_\lambda) + m.$$

Da diese Gleichung aber, nachdem z_1 herausgefallen, eine algebraische Beziehung zwischen $z_2, \cdots z_\lambda$ ausdrücken würde, welche der Annahme nach nicht bestehen sollte, so muss dieselbe identisch erfüllt sein, und da für $z_\lambda = 0$ sich $m = \Phi(\mu) - \Phi(0)$ ergiebt, so folgt

$$(43) \cdots \Phi(z_\lambda + \mu) = \Phi(z_\lambda) + \Phi(\mu) - \Phi(0).$$

Wird nun diese Gleichung, die, wie eben hervorgehoben worden, eine identische sein muss, nach z_λ und μ differentiirt, so er-

giebt sich

$$\Phi'(z_\lambda + \mu) = \Phi'(z_\lambda) = \Phi'(\mu),$$

also

$$z_1 = \Phi(z_\lambda) = c z_\lambda + c_1,$$

und man ersieht aus (42), dass

$$c(z_\lambda + \mu) + c_1 = c z_\lambda + c_1 + m \quad \text{oder} \quad c\mu = m,$$

also c eine Constante ist, während c_1 algebraisch von $z_2, \cdots z_{\lambda-1}$ und x abhängt; da dasselbe aber für die Beziehung von z_1 zu $z_{\lambda-1}$, $z_{\lambda-2}, \cdots z_2$ gilt, so folgt der Satz:

Die einzig mögliche Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen ist die lineare mit constanten Coefficienten

$$A_1 \int y_1\, dx + A_2 \int y_2\, dx + \cdots + A_\lambda \int y_\lambda\, dx = B,$$

worin B eine algebraische Function von x bedeutet).*

Es folgt hieraus schon, dass, wenn Logarithmen in die algebraische Beziehung eintreten sollen, oder wenn eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen statthaben soll, dieselbe, weil die Logarithmen selbst als Integrale algebraischer Functionen dargestellt werden können, nothwendig die Form haben muss

$$A_1 \int y_1\, dx + A_2 \int y_2\, dx + \cdots + A_\lambda \int y_\lambda\, dx =$$
$$= a_1 \log v_1 + a_2 \log v_2 + \cdots + a_p \log v_p + b,$$

worin $A_1, A_2, \cdots A_\lambda, a_1, a_2, \cdots a_p$ Constanten und $v_1, v_2, \cdots v_p, b$ algebraische Functionen von x bedeuten.

Wir werfen nunmehr die Frage auf, ob in eine algebraische Relation zwischen Abel'schen Integralen auch die Umkehrungsfunction des Logarithmus, also die Exponentialfunction, deren Exponent eine algebraische Function von x ist, eintreten kann**). Werde die wieder in irreductibel-algebraischer Form angenommene Beziehung durch

$$z_1 = \varphi(x, z_2, z_3, \cdots z_\lambda, \zeta) \quad \text{oder} \quad z_1 = \Phi(\zeta)$$

dargestellt, wenn Φ nur eine Abkürzung von φ bedeutet, und

$$\zeta = e^w \quad \text{oder} \quad \frac{d\zeta}{dx} = \zeta \frac{dw}{dx}$$

ist, worin w eine algebraische Function von x bezeichnet, und nimmt man wieder an, dass nicht schon zwischen $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ und ζ eine

---

*) Vergl. oeuvres de H. Abel, tome II. pag. 206. 1881.

**) Vgl. die Untersuchungen von Liouville über algebraisch-logarithmische Integrale.

algebraische Beziehung besteht, so folgt, da das allgemeine Integral der Differentialgleichung in ζ durch $\mu e^w = \mu\zeta$ dargestellt wird, wiederum nach Satz II.

$$(44) \cdots\cdot z_1 + m = \Phi(\mu\zeta) \quad \text{oder} \quad \Phi(\mu\zeta) = \Phi(\zeta) + m,$$

und da für $\zeta = 1$ $\quad m = \Phi(\mu) - \Phi(1)$ sich ergiebt,

$$(45) \cdots\cdot \Phi(\mu\zeta) = \Phi(\zeta) + \Phi(\mu) - \Phi(1);$$

die Differentiation der in ζ und μ identischen Gleichung liefert

$$\Phi'(\mu\zeta) = \frac{\Phi'(\zeta)}{\mu} = \frac{\Phi'(\mu)}{\zeta},$$

somit

$$\zeta\Phi'(\zeta) = c \quad \text{oder} \quad z_1 = \Phi(\zeta) = c\log\zeta + c_1 = cw + c_1,$$

worin c wie aus (44) hervorgeht, eine Constante darstellt, d. h. es kommt in der oben angenommenen algebraischen Beziehung ζ selbst gar nicht vor, oder *es giebt keine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen, in welche eine Exponentialfunction mit algebraischem Exponenten eintritt.*

Diese Frage mag noch etwas weiter gefasst werden; es soll untersucht werden, ob zwischen Abel'schen Integralen und einer analytischen Function, welche ein Additionstheorem besitzt, überhaupt eine algebraische Beziehung bestehen könne. Sei w das von x algebraisch abhängige Argument der Function v, der ein Additionstheorem angehören soll, so genügt dieselbe bekanntlich einer algebraischen Differentialgleichung

$$(46) \cdots\cdot F\left(v, \frac{dv}{dw}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dw} = \varphi(v),$$

welche die unabhängige Variable w nicht explicite enthält, und deren allgemeines Integral sich in der Form darstellt

$$V = \psi(w + c),$$

oder auch, da die v-Function ein algebraisches Additionstheorem besitzen sollte, die Beziehung liefert

$$(47) \cdots\cdot V = f\big(\psi(w), \psi(c)\big) = f(v, \mu),$$

in der f eine algebraische Function und μ eine willkürliche Constante bedeutet.

Setzen wir nun die zu untersuchende algebraische Relation zwischen Abel'schen Integralen und der Function v wieder in die Form

$$(48) \cdots\cdot z_1 = \Phi(v),$$

so folgt nach Satz II

$$(49) \cdots\cdot z_1 + m = \Phi(V) = \Phi\big[f(v, \mu)\big] = \Phi(v) + m,$$

und da diese Gleichung wieder unter der Annahme, dass nicht schon zwischen weniger Abel'schen Integralen und der Function v eine algebraische Gleichung stattfinden solle, eine identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach v und μ

$$(50) \cdots \frac{\partial \Phi[f(v,\mu)]}{\partial f(v,\mu)} \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial v} = \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Phi[f(v,\mu)]}{\partial f(v,\mu)} \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial m}{\partial \mu},$$

und daraus wieder durch Division der beiden Gleichungen

$$(51) \cdots \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = \varkappa \cdot \frac{\frac{\partial f(v,\mu)}{\partial v}}{\frac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu}},$$

worin $\varkappa$ eine von v unabhängige Grösse bedeutet; beachtet man aber, dass nach (46) und (47)

$$\frac{dv}{\varphi(v)} + \frac{d\mu}{\varphi(\mu)} = \frac{dV}{\varphi(V)} = \frac{\frac{\partial f(v,\mu)}{\partial v} dv + \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu} d\mu}{\varphi[f(v,\mu)]},$$

also

$$\frac{\partial f(v,\mu)}{\partial v} = \frac{\varphi[f(v,\mu)]}{\varphi(v)}, \quad \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\varphi[f(v,\mu)]}{\varphi(\mu)}$$

ist, so folgt aus (51)

$$\frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = \frac{K}{\varphi(v)},$$

worin K von v unabhängig ist, also

$$z_1 = \Phi(v) = K\int \frac{dv}{\varphi(v)} + L = Kw + L,$$

und es enthält daher jene algebraische Relation die Function v gar nicht; *es giebt somit keine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen und solchen analytischen Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen.*

Bemerkt man jedoch, dass die eben gemachten Schlüsse wesentlich auf der Existenz der Gleichung (47) beruhten, so wird man auf die Frage geführt, ob in eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung eintreten darf, für welche sich das allgemeine Integral als algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ausdrücken lässt, in welche die unabhängige Variable nicht explicite eintritt. Bevor wir diese Frage beantworten, wollen wir erst die Gestalt aller algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(52) \cdots \frac{dv}{dw} = \varphi(v, w)$$

ermitteln, für welche, wenn v ein particuläres, V das allgemeine Integral bedeutet,

$$(53) \cdots V = f(v, \mu)$$

ist, worin f eine algebraische Function und μ eine willkürliche Constante ist.

Zuerst ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn überhaupt für eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen dem allgemeinen Integrale V, einem particulären v, einer willkürlichen Constanten μ und der unabhängigen Variabeln w eine algebraische Beziehung

$$V = F(v, w, \mu)$$

stattfinden soll, wobei v nicht ein algebraisches Integral sein soll, diese Beziehung nach dem Satze I des letzten Paragraphen erhalten bleiben muss, wenn man für v ein beliebiges anderes particuläres Integral und für V ein passendes Integral derselben Differentialgleichung substituirt; wenn dann die Constante μ bei dieser Substitution nicht herausfällt, so wird offenbar V, da sein Ausdruck noch die willkürliche Constante enthält, wieder das allgemeine Integral jener Differentialgleichung sein; besteht somit zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale eine algebraische Beziehung*), so darf man statt des particulären Integrales ein willkürliches anderes substituiren — vorausgesetzt, dass die Constante nicht herausfällt — es bleibt jener algebraische Ausdruck noch das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung.

So wird in der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dw} - v = w$$

mit dem particulären Integrale $v = e^w + w - 1$ das allgemeine

---

*) Es lässt sich ohne weitere Schwierigkeit mit Hülfe der Sätze I und II des vorigen Paragraphen die Richtigkeit der beiden folgenden Theoreme erkennen:

Lässt sich in einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung das allgemeine Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln, von μ particulären Integralen und m willkürlichen Constanten ausdrücken, so erhält man im Allgemeinen immer wieder einen Ausdruck für das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man für eines jener particulären Integrale, welches nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung als der m^{ten} angehört, ein beliebiges anderes, für die $\mu - 1$ übrigen aber bestimmte andere particuläre Integrale eben dieser Differentialgleichung substituirt,

und als specieller Fall:

Lässt sich in einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung das allgemeine Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln, eines particulären Integrales, das nicht schon einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} Genüge leistet, und m willkürlicher Constanten ausdrücken, so erhält man im Allgemeinen wieder einen Ausdruck für das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man für das particuläre Integral ein beliebiges anderes eben dieser Differentialgleichung substituirt.

Integral in der Form ausgedrückt sein

$$V = \mu v - (\mu - 1)(w - 1),$$

und setzt man statt v das particuläre Integral $v_1 = \mu_1 e^w + w - 1$, so wird V in $\mu v_1 - (\mu - 1)(w - 1)$ übergehen, also noch immer das allgemeine Integral darstellen; nur wenn statt v das einzige algebraische Integral $w - 1$ substituirt wird, fällt μ heraus, und man erhält für V dasselbe particuläre algebraische Integral.

Um nun die charakteristische Eigenschaft der Gleichung (52) zu finden, für welche die Beziehung (53) stattfinden soll, setzen wir

$$\frac{dv}{dw} = \varphi(v, w), \quad \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} \frac{dv}{dw} = \varphi\big(f(v, \mu), w\big),$$

woraus sich

$$\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} \varphi(v, w) = \varphi\big(f(v, \mu), w\big)$$

ergiebt, und da, wenn angenommen wird, dass v nicht eine algebraische Function von w ist, diese Gleichung eine in v und μ identische sein muss, so wird die Differentiation nach diesen Grössen die Beziehungen liefern

$$\frac{\partial \varphi\big(f(v, \mu), w\big)}{\partial f(v, \mu)} \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} = \frac{\partial^2 f(v, \mu)}{\partial v^2} \varphi(v, w) + \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} \frac{\partial \varphi(v, w)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varphi\big(f(v, \mu), w\big)}{\partial f(v, \mu)} \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 f(v, \mu)}{\partial v \, \partial \mu} \varphi(v, w),$$

oder durch Elimination von $\frac{\partial \varphi\big(f(v, \mu), w\big)}{\partial f(v, \mu)}$, wie eine leichte Rechnung ergiebt,

$$\varphi(v, w) = M \frac{\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial \mu}}{\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v}},$$

worin M eine algebraische Function von w und μ bedeutet, und $\varphi(v, w)$ von μ frei sein muss; setzt man $\mu = 0$, so folgt

$$\varphi(v, w) = \psi(v) \chi(w),$$

und somit als nothwendige Form der Differentialgleichung (52), für welche die Relation (53) existiren soll,

$$(54) \cdots\cdot \frac{dv}{dw} = \psi(v) \chi(w),$$

worin ψ und χ algebraische Functionen bedeuten. Fragen wir nun umgekehrt, welchen Differentialgleichungen von dieser Form auch wirklich eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und *einem* particulären Integrale entspricht, so kann wegen

$$\frac{dV}{\psi(V)} = \chi(w)\,dw, \quad \frac{dv}{\psi(v)} = \chi(w)\,dw$$

die Frage auch so gestellt werden: wann hat die Differentialgleichung

$$(55) \cdots \frac{dV}{\psi(V)} = \frac{dv}{\psi(v)}$$

ein allgemeines algebraisches Integral? Ist nun α ein willkürlicher constanter Werth, und sei $V_{v=\alpha} = C$, so können wir das Integral der Gleichung (55) in die Form setzen

$$(56) \cdots \int_\alpha^V \frac{dt}{\psi(t)} - \int_\alpha^v \frac{dt}{\psi(t)} = \int_\alpha^C \frac{dt}{\psi(t)},$$

und eliminirt man nun unter der Annahme, dass der Differentialgleichung (55) ein algebraisches Integral von der Form der Gleichung (53) zukommen soll, aus den hieraus sich ergebenden Gleichungen

$$V = f(v, \mu) \quad \text{und} \quad C = f(\alpha, \mu)$$

die Constante μ, so folgt die algebraische Beziehung

$$C = f_1(v, V),$$

d. h. nach (56), das Integral

$$\int \frac{dt}{\psi(t)}$$

besitzt ein algebraisches Additionstheorem. Lassen sich umgekehrt zwei gleichartige Integrale dieser Form zu einem solchen vereinigen mit algebraischer Relation zwischen den oberen Grenzen, so wird jede Differentialgleichung von der Gestalt (54) wegen der daraus folgenden Beziehung (55) eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale liefern, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dv}{dw} = f(v, w)$ *so beschaffen ist, dass ihr allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, ist die, dass* $f(v, w) = \psi(v)\chi(w)$, *worin* $\chi(w)$ *eine willkürliche algebraische Function von* w *und* $\psi(v)$ *eine solche algebraische Function von* v *bedeutet, dass* $\frac{dv}{\psi(v)}$ *ein Differential erster Gattung vom Geschlechte 1 bedeutet.*

Nehmen wir nun an, es bestehe für Abel'sche Integrale und dem Integrale einer Differentialgleichung (54), deren Functionen $\psi(v)$ und $\chi(w)$ die eben angegebenen Eigenschaften haben sollen, eine algebraische Beziehung, so werden für eine solche alle die oben aus der Gleichung (47) abgeleiteten Folgerungen gelten, und wir werden

also auch zu der Beziehung (51) geführt werden

$$\frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = \varkappa \frac{\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v}}{\frac{d f(v, \mu)}{\partial \mu}}.$$

Nun ist aber vermöge der Annahme

$$\frac{dV}{\psi(V)} = \frac{dv}{\psi(v)} + \frac{d\mu}{\psi(\mu)},$$

und daher wie oben

$$\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} = \frac{\psi[f(v, \mu)]}{\psi(v)}, \quad \frac{d f(v, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\psi[f(v, \mu)]}{\psi(\mu)},$$

woraus

$$\frac{\partial \Phi(v)}{dv} = \frac{K}{\psi(v)}$$

folgt, worin K von v unabhängig ist, und also

$$(57) \cdots\cdot z_1 = \Phi(v) = K\int\frac{dv}{\psi(v)} + L = K\int\chi(w)dw + L;$$

da w eine algebraische Function von x ist, so stellt $\int\chi(w)dw$ wieder nur ein Abel'sches Integral dar, ohne dass das Integral v der Differentialgleichung (54) selbst in die algebraische Beziehung eingeht, und wir erhalten also den Satz:

In eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen kann nie das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung eingehen, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, welche die unabhängige Variable nicht explicite enthält.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass man die vorigen Betrachtungen auf die Frage nach den etwa stattfindenden algebraischen Beziehungen zwischen Abel'schen Integralen und einer durch irgend eine Differentialgleichung definirten Transcendenten ausdehnen kann; sei z. B. v die Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2v}{dw^2} + P\frac{dv}{dw} + Qv = 0,$$

worin w eine algebraische Function von x, P und Q rationale Functionen von w sein sollen, und werde wieder

$$z_1 = \Phi(v)$$

gesetzt, so wird nach Satz II unter der Annahme, dass nicht schon zwischen den anderen Abel'schen Integralen $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$, v und $\frac{dv}{dw}$ ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, die Beziehung folgen

$$z_1 + m = \Phi(\mu v) = \Phi(v) + m = \Phi(v) + \Phi(\mu) - \Phi(1),$$

und somit wieder mit Hülfe bekannter Schlüsse

$$z_1 = \Phi(v) = c \log v + c_1,$$

so dass in der obigen Relation nie v selbst, sondern nur der Logarithmus dieser Grösse vorkommen kann, oder auch, wenn

$$v = e^{\int t\,dw}$$

gesetzt wird, nur die Quadratur eines Integrales der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dt}{dw} + t^2 + Pt + Q = 0.$$

§ 7.

Algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen oder zwischen Integralen der Differentialgleichungen (39) festgestellt, wollen wir jetzt nach der allgemeinen Gestalt einer algebraischen Relation für Integrale $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ der Differentialgleichungen

$$(58) \cdots \cdot \frac{dz}{dx} = zy_1, \quad \frac{dz}{dx} = zy_2, \cdots \frac{dz}{dx} = zy_\lambda$$

fragen, worin $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ irreductible algebraische Functionen bedeuten; es bedarf nach dem Früheren keiner weiteren Auseinandersetzung, dass unter der Annahme, dass nicht schon zwischen $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ eine algebraische Beziehung stattfinde, sich für die Relation

$$z_1 = \Phi(z_\lambda)$$

die Bedingungen ergeben

$$(59) \cdots \cdot mz_1 = \Phi(\mu z_\lambda) = m\Phi(z_\lambda) = \frac{\Phi(z_\lambda)\,\Phi(\mu)}{\Phi(1)},$$

woraus durch Differentiation nach z_λ und μ

$$z_\lambda \frac{\Phi'(z_\lambda)}{\Phi(z_\lambda)} = c_\lambda$$

folgt, worin c_λ von z_λ unabhängig, also durch Integration

$$z_1 = \Phi(z_\lambda) = a_\lambda z_\lambda^{c_\lambda},$$

und es wird c_λ vermöge der Functionalgleichung (59) oder der Beziehung

$$a_\lambda(\mu z_\lambda)^{c_\lambda} = m a_\lambda z_\lambda^{c_\lambda}$$

eine Constante sein müssen; man schliesst leicht, indem man auf die anderen Integrale $z_2, z_3, \cdots$ übergeht, dass *die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen particulären Integralen der homogenen linearen*

Differentialgleichungen erster Ordnung (58) *die Gestalt hat*

$$(60) \cdots\cdot z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_\lambda^{c_\lambda} = A,$$

worin A eine algebraische Function von x und $c_1, c_2, \cdots c_\lambda$ rationale Constanten sein müssen. Dass in der That derartige Beziehungen zwischen particulären Integralen derselben Differentialgleichung für verschiedene algebraisch von einander abhängige Argumente existiren, werden wir später bei der Besprechung des verallgemeinerten Abel'schen Theorems sehen.

Werfen wir endlich noch die Frage nach der Form der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen Integralen des Systems von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung auf

$$(61) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} + zy_1 = \eta_1, \quad \frac{dz}{dx} + zy_2 = \eta_2, \cdots \frac{dz}{dx} + zy_\lambda = \eta_\lambda,$$

und bezeichnen diese Relation durch

$$(\mathrm{A}) \cdots\cdot \varphi(z_1, z_2, \cdots z_\lambda) = 0;$$

da nun allgemein

$$(62) \cdots\cdot z_\varkappa = c_\varkappa e^{-\int y_\varkappa dx} + e^{-\int y_\varkappa dx}\int e^{\int y_\varkappa dx}\eta_\varkappa dx = c_\varkappa \zeta_\varkappa + Z_\varkappa$$

ist, worin $\zeta_\varkappa$ und $Z_\varkappa$ als Integrale der Differentialgleichungen

$$(63) \cdots\cdot \frac{d\zeta_\varkappa}{dx} + \zeta_\varkappa y_\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dZ_\varkappa}{dx} + Z_\varkappa y_\varkappa = \eta_\varkappa$$

aufgefasst werden können, und die algebraische Beziehung (A) in eine algebraische Beziehung zwischen

$$c_1\zeta_1 + Z_1, \; c_2\zeta_2 + Z_2, \cdots c_\lambda\zeta_\lambda + Z_\lambda$$

übergeht, so wollen wir jene Beziehung jetzt gleich in der allgemeineren Form

$$(64) \cdots\cdot \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda, Z_1, Z_2, \cdots Z_\lambda) = 0$$

zu Grunde legen. Nehmen wir an, dass in der Gleichung (64) mindestens zwei Z vorkommen — wozu wir für das System (61) wenigstens berechtigt sind, da $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ nicht algebraische Functionen sein sollten*) — und setzen die algebraische Beziehung (64) in die Form

$$(65) \cdots\cdot Z_1 = \Phi(Z_\lambda),$$

so wird nach Satz II des vorigen Paragraphen, wenn wir annehmen, dass nicht schon zwischen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdot \zeta_\lambda, Z_2, Z_3, \cdots\cdot Z_\lambda$ eine algebraische Beziehung stattfinde — indem wir diejenige algebraische Beziehung der Untersuchung zu Grunde legen, welche

*) Die Annahme, dass ein $\zeta_\varkappa$ eine algebraische Function ist, zieht offenbar nach sich, dass das entsprechende $Z_\varkappa$ das Product aus einer algebraischen Function in ein Abel'sches Integral ist.

$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda$ mit der kleinsten Zahl der Z verbindet —,

$$(66)\ Z_1 + m\zeta_1 = \Phi(Z_\lambda + \mu\zeta_\lambda) = \Phi(Z_\lambda) + m\zeta_1 = \Phi(Z_\lambda) + \Phi(\mu\zeta_\lambda) - \Phi(0)$$

sein, und somit, wie unmittelbar zu sehen,

$$Z_1 = \Phi(Z_\lambda) = aZ_\lambda + b,$$

worin a nach (66) durch den Ausdruck

$$a = \frac{m}{\mu}\frac{\zeta_1}{\zeta_\lambda} = \varkappa\frac{\zeta_1}{\zeta_\lambda}$$

gegeben ist, in dem $\varkappa$ constant, und b von Z_1 und Z_λ unabhängig ist; schliesst man so weiter, so ergiebt sich die gesuchte algebraische Relation in der Form

$$(67) \cdots\cdot \varkappa_1\frac{Z_1}{\zeta_1} + \varkappa_2\frac{Z_2}{\zeta_2} + \cdots + \varkappa_\lambda\frac{Z_\lambda}{\zeta_\lambda} = U,$$

worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\lambda$ Constanten und U eine algebraische Function von $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda$ sein wird. Da aber die Existenz einer Relation zwischen $Z_2, \cdots Z_\lambda, \zeta_1, \cdots \zeta_\lambda$ ausgeschlossen war, so dürfen wir wieder nach Satz II in (67) $\mu\zeta_1$ statt ζ_1 und $Z_1 + m\zeta_1$ statt Z_1 setzen, und es müsste diese Beziehung unverändert bleiben; es ergiebt sich aber dann

$$(68) \cdots\cdot \frac{\varkappa_1}{\mu}\frac{Z_1}{\zeta_1} + \varkappa_2\frac{Z_2}{\zeta_2} + \cdots + \varkappa_\lambda\frac{Z_\lambda}{\zeta_\lambda} = U_1 - \frac{m\varkappa_1}{\mu},$$

worin U_1 aus U hervorgeht, wenn ζ_1 durch $\mu\zeta_1$ ersetzt wird, und aus (67) und (68) würde wiederum folgen, dass

$$\frac{\varkappa_1 - \mu}{\mu}\frac{Z_1}{\zeta_1} = U_1 - U - \frac{m\varkappa_1}{\mu},$$

d. h. es wäre schon Z_1 algebraisch ausdrückbar durch $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda$, was gegen die Annahme war — es giebt somit keine Elementarbeziehung zwischen den ζ und Z, in welcher mindestens zwei der Z-Grössen vorkommen.

Untersuchen wir nun Beziehungen zwischen *einer* Z-Grösse, z. B. Z_1 und ν ζ-Grössen, nehmen aber jetzt wieder an, dass nicht schon zwischen Z_1 und weniger als ν dieser ζ-Grössen eine algebraische Beziehung stattfinden soll, wobei ausserdem fürs erste $\nu \geqq 2$ sein soll; setzt man diese Beziehung in die Form

$$(69) \cdots\cdot \zeta_{\varrho_1} = \Phi(\zeta_{\varrho_2}),$$

so wird sich wiederum nach Satz II und mit Hülfe der für die Gleichung (59) gemachten Schlüsse

$$(70) \cdots\cdot \zeta_{\varrho_1}^{\alpha_1}\zeta_{\varrho_2}^{\alpha_2} \cdots \zeta_{\varrho_\nu}^{\alpha_\nu} = V$$

ergeben, worin V eine algebraische Function von Z_1 und x ist, während $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ rationale Zahlen bedeuten; da aber andererseits

auch zwischen den ν ζ-Grössen keine algebraische Relation bestehen soll, weil sonst schon zwischen Z und weniger als ν ζ-Grössen auch ein algebraischer Zusammenhang existirte, so darf man in (70) ζ_{ϱ_1} durch $\mu\zeta_{\varrho_1}$ und Z_1 durch $Z_1 + m\zeta_1$ ersetzen und erhielte

$$(71) \cdots\cdot \mu^{\alpha_1}\zeta_{\varrho_1}^{\alpha_1}\zeta_{\varrho_2}^{\alpha_2}\cdots\zeta_{\varrho_\nu}^{\alpha_\nu} = V_1,$$

worin V_1 aus V erhalten wird, wenn Z_1 durch $Z_1 + m\zeta_1$ ersetzt wird, und somit

$$(72) \cdots\cdot V_1 = \mu^{\alpha_1} V,$$

welche Gleichung eine Beziehung zwischen Z_1 und ζ_1 fixiren würde, welche offenbar nicht identisch sein kann; wir sehen somit, dass eine Elementarbeziehung zwischen Z_1 und einigen der ζ-Functionen nur *eine* dieser letzteren Functionen enthalten kann. Sei diese Beziehung

$$(73) \cdots\cdot Z_1 = \Phi(\zeta_\varrho),$$

so folgt, da immer angenommen wird, dass die Integrale der in Rede stehenden Differentialgleichungen nicht algebraisch sind,

$$Z_1 + m\zeta_1 = \Phi(\mu\zeta_\varrho) = \Phi(\zeta_\varrho) + m\zeta_1,$$

und da diese Gleichung keine identische sein kann, da ζ_1 nur in dem Ausdrucke $m\zeta_1$ enthalten ist, so ist ζ_ϱ eine algebraische Function von ζ_1, und es geht (73) über in

$$(74) \cdots\cdot Z_1 = \Psi(\zeta_1);$$

aber hieraus folgt wieder

$$Z_1 + m\zeta_1 = \Psi(\mu\zeta_1) = \Psi(\zeta_1) + m\zeta_1,$$

oder wie leicht zu sehen, da diese Gleichung identisch sein muss, $\Psi'(\zeta_1) = \text{const.}$, und daher

$$(75) \cdots\cdot Z_1 = a\zeta_1 + b,$$

worin a eine Constante und b eine algebraische Function von x ist; wir finden somit, *dass die einzig mögliche Elementarbeziehung zwischen Integralen der Systeme* (63) *in der Form enthalten ist*

$$Z_\varkappa = a_\varkappa \zeta_\varkappa + b_\varkappa,$$

worin $a_\varkappa$ eine Constante, $b_\varkappa$ eine algebraische Function von x ist.

In der That besteht zwischen den Integralen

$$\zeta = e^{-x} \quad \text{und} \quad Z = e^{-x} + x - 1$$

der Differentialgleichungen

$$\frac{d\zeta}{dx} + \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dZ}{dx} + Z = x$$

die Beziehung

$$Z = \zeta + x - 1.$$

Bevor wir dieses Kapitel schliessen, welches die Aufstellung der Sätze I und II zum Gegenstande hatte, wollen wir zum Beweise eben dieser Sätze noch eine Bemerkung hinzufügen. Sei

$$F(x, z_1, z_2, \cdots z_\lambda) = 0$$

eine algebraische Relation zwischen particulären Integralen algebraischer Differentialgleichungen, so ist unmittelbar klar, dass, wenn man die Variable x solche Umläufe machen lassen kann, dass z. B. das Integral z_1 in ein anderes particuläres Integral z_1' der die Grösse z_1 definirenden Differentialgleichung übergeht, weil dann auch $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ nur in dieselben oder andere particuläre Integrale der resp. Differentialgleichungen übergehen können, dieselbe algebraische Beziehung zwischen den neuen particulären Integralen

$$F(x, z_1', z_2', \cdots z_\lambda') = 0$$

bestehen wird; insofern man also durch geschlossene Umläufe ein particuläres Integral in ein anderes übergehen lassen kann, würden die oben bewiesenen Sätze von der Erhaltung der algebraischen Relation unmittelbar ersichtlich sein; dass dies jedoch im allgemeinen nicht der Fall ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung — so hat z. B. die Differentialgleichung

$$z \frac{d^2 z}{dx^2} - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - z \frac{dz}{dx} = 0$$

das allgemeine Integral

$$z = c_1 e^{ce^x},$$

worin c und c_1 willkürliche Constanten bedeuten, und da alle Integrale eindeutig sind, so kann man durch geschlossene Umläufe des x nicht von einem particulären Integrale zum anderen übergehen, trotzdem wird aber unter den oben angegebenen Bedingungen eine algebraische Beziehung für ein neues System particulärer Integrale auch solcher Differentialgleichungen erhalten bleiben. Wären $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ Lösungen irreductibler algebraischer Gleichungen, für welche ebenfalls der Satz von der Erhaltung des algebraischen Zusammenhanges besteht, so liesse sich dieser Satz unmittelbar aus der Ueberlegung herleiten, dass man von irgend einer Lösung einer irreductiblen algebraischen Gleichung zu jeder derselben gelangen kann, wenn man x geschlossene Umläufe beschreiben lässt; aber man kann nicht immer, wie eben hervorgehoben worden, bei Differentialgleichungen, selbst nicht bei irreductibeln, durch geschlossene Umläufe von einem particulären Integrale zu einem anderen gelangen — so kennen wir z. B. homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zwei überall

eindeutige Integrale besitzen, welche nicht als Integrale algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung darstellbar sind*).

*) Es mag dieser Punkt mit einigen Worten erläutert werden: Seien zwei particuläre Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten y_1 und y_2, und mag y_1 bei der Umkreisung eines singulären Punktes der Coefficienten in $ay_1 + by_2$ übergehen, so kann man y_1 und $ay_1 + by_2$ im Allgemeinen als zwei Fundamentalintegrale betrachten, da die homogene Beziehung $my_1 + n(ay_1 + by_2) = 0$ nur für $b = 0$ bestehen kann, und wir sehen somit, dass, wenn in einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein particuläres Integral existirt, das nicht bei einem Umlauf um einen singulären Punkt in sich selbst mit einem constanten Factor versehen übergeht, dann stets zwei particuläre Fundamentalintegrale vorhanden sind, von denen das eine bei einer Umkreisung in das andere übergeht, wie dies bei irreductibeln algebraischen Gleichungen der Fall ist. Geht nun y_1 in ay_1 über und y_2 ebenso in Ay_2, so wird man im Allgemeinen $\varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 y_2$ und $a\varkappa_1 y_1 + A\varkappa_2 y_2$, von denen das erste bei einer Umkreisung in das zweite übergeht, als Fundamentalintegrale betrachten dürfen, da $m(\varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 y_2) + n(a\varkappa_1 y_1 + A\varkappa_2 y_2) = 0$ die Bedingung $a = A$ nach sich zieht, und wir sehen also, *dass nur dann nicht zwei Fundamentalintegrale existiren, von denen das eine bei einer Umkreisung eines singulären Punktes in das andere übergeht, wenn y_1 und y_2 in dasselbe Vielfache ihrer resp. Werthe durch eine Umkreisung übergeführt werden*, was z. B. der Fall ist, wenn die Differentialgleichung zwei eindeutige Integrale besitzt. In diesem Falle muss aber die Fuchs'sche Fundamentalgleichung zwei nur um eine ganze Zahl verschiedene Lösungen r und r_1 besitzen, und ihre Integrale werden dann bekanntlich in der Umgebung des singulären Punktes die Form haben

$$y_1 = (x-\alpha)^r \varphi_{11} \quad \text{und} \quad y_2 = (x-\alpha)^{r_1}\left\{\varphi_{12} + \varphi_{22}\log(x-\alpha)\right\},$$

worin φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} eindeutige, nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende, in $x = \alpha$ von Null verschiedene Reihen vorstellen und $\varphi_{22} = C\varphi_{11}$ ist; da nun bei einer Umkreisung von α

$$y_1 \text{ in } e^{2r\pi i} y_1,\ y_2 \text{ in } e^{2r_1\pi i}(x-\alpha)^{r_1}\left\{\varphi_{12} + \varphi_{22}\log(x-\alpha) + 2\pi i\varphi_{22}\right\} =$$
$$= e^{2r\pi i} y_2 + 2\pi i C e^{2r\pi i} y_1 (x-\alpha)^{r_1 - r}$$

übergeht, so muss der Annahme gemäss $\varphi_{22} = 0$ sein, so dass

$$y_1 = (x-\alpha)^r \varphi_{11},\ y_2 = (x-\alpha)^{r_1}\varphi_{12}$$

wird, und diese Form müssten die Fundamentalintegrale um jeden singulären Punkt herum haben, wenn nicht solche particuläre Integrale existiren sollen, welche bei der Umkreisung eines kritischen Punktes in einander übergehen, was wir aber auch, wie mit Hülfe der Substitution $y = (x-\alpha)^r z$ unmittelbar ersichtlich ist, so ausdrücken können, dass die aus der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ transformirte Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{2r}{x-\alpha} + P\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{r(r-1)}{(x-\alpha)^2} + \frac{Pr}{x-\alpha} + Q\right)z = 0$$

in der Umgebung von α eindeutige Fundamentalintegrale haben müsse. Dass aber die Differentialgleichung zweiter Ordnung in y dann noch nicht etwa re-

Drittes Kapitel.

Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale von Differentialgleichungen.

§ 8.

Untersuchungen über das erweiterte Abel'sche Theorem für das Geschlecht $p = 1$; weitere Sätze über den Zusammenhang des allgemeinen Integrales mit den particulären einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wollen im Folgenden einige Anwendungen der oben entwickelten Principien und Sätze behandeln, welche Verallgemeinerungen wichtiger Sätze der Integralrechnung zum Gegenstande haben.

Das Abel'sche Theorem liefert bekanntlich für die Summe einer *beliebigen* Anzahl gleichartiger Abel'scher Integrale stets, von einer algebraisch-logarithmischen Function abgesehen, die Summe einer *festen* Anzahl derselben Abel'schen Integrale, deren Zahl durch das Geschlecht p der algebraischen Function unter dem Integral bestimmt ist, und deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades liefern, deren Coefficienten rationale Functionen der Grenzen der gegebenen Integrale und der zu ihnen gehörigen Irrationalitäten sind, während die diesen Lösungen zugehörigen Irrationalitäten durch eben diese mit Hülfe der vorher bezeichneten Grössen rational ausdrückbar sind, — dass diese Relation zwischen den Integralen eine additive mit constanten Coefficienten sein muss, folgt aus dem oben bewiesenen allgemeinen Satze, dass zwischen Abel'schen Integralen überhaupt nur additive Beziehungen dieser Art stattfinden können, ein Satz, der die Grundlage für die Transformationstheorie der Abel'schen Integrale und Functionen bildet. Es soll nunmehr die Frage aufgeworfen werden, ob es ähnliche Theoreme für beliebige Differential-

---

ductibel sein muss, geht daraus hervor, dass, wie früher gezeigt worden, für den Fall, dass nicht die beiden Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, die Voraussetzung der Reductibilität der Differentialgleichung erfordert, dass ein Integral derselben der homogenen linearen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0$ genügt; nun geht freilich $y = e^{-\int f(x)\,dx}$, da $f(x)$ eine rationale Function ist, bei einer Umkreisung eines singulären Punktes dieser Function in sich selbst mit einem constanten Factor versehen über, aber nicht alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welchen die oben angegebene Eigenschaft der Fundamentalintegrale zukommt, haben Integrale dieser Form, sind also reductibel.

gleichungen giebt, wie es das Abel'sche Theorem für die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

liefert, in welcher y eine algebraische Function von x bedeutet, oder, praeciser ausgedrückt, *ob man die Gestalt und Eigenschaft von algebraischen Beziehungen angeben kann, welche für ein bestimmtes particuläres Integral irgend einer Differentialgleichung zwischen den Werthen desselben für algebraisch unter einander zusammenhängende Werthe der unabhängigen Variabeln stattfinden.*

Gehen wir von der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = zy$$

aus, in welcher y eine algebraische Function von x bedeutet, so folgt aus dem in § 7 bewiesenen Theorem, wenn wir die Gleichungen (58) in *eine* Gleichung zusammenfallen lassen, und die abhängigen x-Werthe durch die unabhängigen ausdrücken, dass die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen den Werthen eines bestimmten particulären Integrales dieser Differentialgleichung für unter einander in algebraischer Beziehung stehende Werthe der Variabeln die Gestalt hat

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots\cdot z_m^{a_m} = u,$$

worin $a_1, a_2, \cdots a_m$ rationale Constanten, und u eine algebraische Function bedeutet. Umgekehrt besteht aber auch in der That, weil, wenn

$$\zeta_1 = \int^{x_1} y\,dx,\ \zeta_2 = \int^{x_2} y\,dx, \cdots \zeta_\mu = \int^{x_\mu} y\,dx,\ Z_1 = \int^{\xi_1} y\,dx, \cdots Z_p = \int^{\xi_p} y\,dx$$

gesetzt wird, nach dem Abel'schen Theorem — wenn die Integrale z. B. erster Gattung sind — die Beziehung statthat

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_\mu = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_p,$$

worin $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_p$ von $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ in bekannter Weise abhängen, wegen

$$z_1 = e^{\zeta_1},\ z_2 = e^{\zeta_2}, \cdots z_\mu = e^{\zeta_\mu},\ z_1' = e^{Z_1}, \cdots z_p' = e^{Z_p}$$

die Relation

$$(2) \cdots\cdot z_1 z_2 \cdots z_\mu z_1'^{-1} z_2'^{-1} \cdots z_p'^{-1} = 1,$$

welche unter der Beschränkung, die für y durch die Annahme von Integralen erster Gattung gemacht worden, *das erweiterte Abel'sche Theorem für die Differentialgleichung* (1) *bildet.* Für den Fall, dass $\int y\,dx$ ein allgemeines Abel'sches Integral darstellt, hat das Additionstheorem der Integrale bekanntlich die Form

$$\int^{x_1} y\,dx + \int^{x_2} y\,dx + \cdots + \int^{x_\mu} y\,dx = \int^{\xi_1} y\,dx + \cdots + \int^{\xi_p} y\,dx$$
$$+ u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin $u, v_1, v_2, \cdots v_\varrho$ rationale Functionen von $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ und der zu diesen Grenzen gehörigen Irrationalitäten sind, und man erhält somit als allgemeines Abel'sches Theorem für ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1) die Form

$$(3) \cdots\cdots z_1 z_2 \cdots z_\mu z_1'^{-1} \cdots z_p'^{-1} = v_1^{A_1} v_2^{A_2} \cdots v_\varrho^{A_\varrho} e^u,$$

wodurch im Allgemeinen nicht mehr eine algebraische Relation repräsentirt wird.

Wir sehen somit, dass der im zweiten Kapitel bewiesene allgemeine Satz von der Erhaltung der algebraischen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen, welcher zugleich ein Mittel zur Erforschung der Form jener Relation lieferte, für den Fall, dass alle Differentialgleichungen in eine zusammenfallen, zugleich ein Mittel bieten wird, um für den Fall, dass ein particuläres Integral einer beliebigen Differentialgleichung ein erweitertes Abel'sches Theorem besitzt, die Form desselben festzustellen.

Für den Fall, dass das Geschlecht der algebraischen Function y gleich 1 ist, würde die Gleichung (2) die Gestalt annehmen

$$(4) \cdots\cdots z_1' = z_1 z_2,$$

worin ξ_1 und y_{ξ_1} rationale Functionen von $x_1, x_2, y_{x_1}, y_{x_2}$ sind. Fragen wir jetzt allgemein nach denjenigen Differentialgleichungen, für welche ein particuläres Integral z die Eigenschaft hat, dass zwischen zweien seiner Werthe z_1 und z_2 für die unabhängigen Variabeln x_1 und x_2 und seinem Werthe Z für die Variable X, welche mit x_1 und x_2 durch die algebraische Gleichung

$$(5) \cdots\cdots X \doteq \varphi(x_1, x_2)$$

verbunden ist, eine algebraische Relation

$$(6) \cdots\cdots Z = f(z_1, z_2)$$

bestehe, in welche, wie oben in (4), die unabhängigen Variabeln selbst nicht eintreten.

Differentiirt man die Gleichung (6) nach x_1 und x_2, so folgt

$$\frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2},$$

und durch Elimination von $\frac{dZ}{dX}$

$$(7) \cdots\cdots \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2}\frac{\partial X}{\partial x_1};$$

setzt man hierin x_2 und z_2 gleich numerischen Constanten, so folgt,

dass, weil $\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}$ und $\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}$ algebraische Functionen von z_1 und z_2 sind, *z_1 als Function von x_1 aufgefasst einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen muss.* Wir können somit schon hieraus schliessen, *dass irreductible algebraische Differentialgleichungen von einer höheren Ordnung als der ersten ein durch die Gleichung* (6) *dargestelltes Abel'sches Theorem nicht besitzen können.*

Fragen wir jetzt, welche Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Gleichung (6) vereinbar sind; sei eine solche Differentialgleichung

$$(8) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = F(x, z),$$

und das betrachtete particuläre Integral ein nicht algebraisches, so wird sich wegen

$$(9) \cdots\cdot \frac{dZ}{dX} = F(X, Z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = \frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_2}$$

die Gleichung

$$(10) \cdots\cdot \frac{\partial Z}{\partial x_2} = F(X, Z)\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial Z}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2}$$

ergeben, und somit nach (6) und vermöge der Beziehung

$$(11) \cdots\cdot \frac{dz_2}{dx_2} = F(x_2, z_2)$$

auch

$$(12) \cdots\cdot \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} F(x_2, z_2) = F\big(X, f(z_1, z_2)\big)\frac{\partial X}{\partial x_2}.$$

Da diese letzte Gleichung eine algebraische Gleichung in z_1 und z_2 vorstellt, diese Grössen jedoch von einander unabhängig sind, so wird dieselbe eine in ihnen identische sein müssen, und wenn man daher für z_2 irgend ein anderes particuläres Integral z_2' der mit Adjunction von X irreductibel gemachten Gleichung (11) substituirt, ferner eine Grösse Z' aus der Gleichung $Z' = f(z_1, z_2')$ herleitet, so wird offenbar die Gleichung (12) in die der Gleichung (10) analoge

$$\frac{\partial Z'}{\partial z_2'}\frac{dz_2'}{dx_2} = \frac{\partial Z'}{\partial x_2} = F(X, Z')\frac{\partial X}{\partial x_2},$$

oder in

$$\frac{dZ'}{dX} = F(X, Z')$$

übergehen, d. h. Z' ist noch ein Integral der Gleichung (9). Setzt man somit in (6) statt z_2 das allgemeine Integral der mit Adjunction von X irreductibel gemachten Gleichung

$$\frac{dz}{dx_2} = F(x_2, z),$$

so enthält dieses eine willkürliche Constante, kann also für ein festes, aber beliebiges x_2 noch alle Werthe annehmen und somit als

willkürliche Constante C betrachtet werden; da aber Z aus Gleichung (6) immer ein Integral von (9) bleibt, so wird, da die willkürliche Constante C in dem Ausdrucke dieses Integrales

$$(13) \cdots\cdot Z = f(z_1, C)$$

enthalten ist, diese Form das allgemeine Integral jener Differentialgleichung darstellen; bezeichnet man nun einen bestimmten Werth von C mit C_0 und das zugehörige particuläre Integral von (9) durch

$$(14) \cdots\cdot Z_0 = f(z_1, C_0),$$

so erhält man durch Elimination von z_1 zwischen (13) und (14)

$$(15) \cdots\cdot Z = \psi(Z_0, C),$$

d. h. *es ist das allgemeine Integral jener Differentialgleichung* (9) *eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten, in welche die unabhängige Variable X nicht explicite eintritt.* Wenn aber eine Differentialgleichung erster Ordnung diese Eigenschaft besitzt, so muss dieselbe, wie in § 6 gezeigt worden, die Form haben

$$(16) \cdots\cdot \frac{dZ}{dX} = \lambda(X)\,\mu(Z),$$

worin $\lambda(X)$ eine willkürliche algebraische Function von x, und $\mu(Z)$ eine solche algebraische Function von Z ist, dass ihr Geschlecht 1 ist und $\frac{dZ}{\mu(Z)}$ ein Differential erster Gattung vorstellt, d. h. zwei solche Differentialausdrücke sich so zu einem gleichartigen Differentiale vereinigen lassen, dass die Variablen in einem algebraischen Zusammenhange stehen — und diese Bedingung war auch hinreichend. Es müssen somit all' die gesuchten Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form sein

$$(17) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = \lambda(x)\,\mu(z),$$

aber nicht umgekehrt wird jede Differentialgleichung dieser Form die Eigenschaft haben, dass es, wenn x_1 und x_2 zwei willkürliche Argumente, z_1 und z_2 die zu diesen gehörigen Werthe eines particulären Integrales der Differentialgleichung bedeuten, ein Argument x_3 giebt, welches von x_1 und x_2 algebraisch so abhängig ist, dass der dazu gehörige Werth z_3 desselben particulären Integrales mit z_1 und z_2 ebenfalls in einem algebraischen Zusammenhange steht; bemerkt man jedoch, dass, wenn man x als Function von z auffasst, für diese Function dieselbe Eigenschaft gefordert wird, wie vorher von z als Function von x, so folgt, dass die Differentialgleichung auch die Form haben muss

$$(18) \cdots\cdot \frac{dx}{dz} = \varLambda(z)\,M(x),$$

worin $A(z) = \frac{1}{\mu(z)}$, $M(x) = \frac{1}{\lambda(x)}$ und $\int \frac{dx}{M(x)} = \int \lambda(x)\,dx$ ein Integral erster Gattung vom Geschlechte 1 sein muss; setzt man nunmehr

$$\frac{dz_1}{\mu(z_1)} = \lambda(x_1)\,dx_1, \quad \frac{dz_2}{\mu(z_2)} = \lambda(x_2)\,dx_2,$$

also

$$(19) \cdots\cdots \frac{dz_1}{\mu(z_1)} + \frac{dz_2}{\mu(z_2)} = \lambda(x_1)\,dx_1 + \lambda(x_2)\,dx_2,$$

so ergiebt sich der gemachten Annahme zufolge

$$\frac{dz_1}{\mu(z_1)} + \frac{dz_2}{\mu(z_2)} = \frac{dz_3}{\mu(z_3)}, \quad \lambda(x_1)\,dx_1 + \lambda(x_2)\,dx_2 = \lambda(x_3)\,dx_3,$$

worin z_3 algebraisch von z_1 und z_2, x_3 algebraisch von x_1 und x_2 abhängt, und da nach (19) wieder

$$\frac{dz_3}{dx_3} = \lambda(x_3)\,\mu(z_3)$$

ist, so folgt, dass *eine algebraische Differentialgleichung dann und nur dann ein erweitertes Abel'sches Theorem von der Form besitzt, dass die Werthe eines particulären Integrales für zwei beliebige Werthe der Variabeln in einem von den Variabeln freien algebraischen Zusammenhange stehen mit dem Werthe desselben particulären Integrales für einen Werth der Variabeln, der algebraisch von jenen ersten Werthen abhängt, — wenn jenes Integral, das selbst nicht algebraisch sein soll, einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form genügt*

$$\frac{dz}{dx} = \lambda(x)\,\mu(z),$$

in welcher $\lambda(x)$ und $\mu(z)$ algebraische Functionen von der Beschaffenheit sind, dass

$$\frac{dz}{\mu(z)} \quad \text{und} \quad \lambda(x)\,dx$$

zum Geschlechte 1 gehörige Differentialien erster Gattung sind.

So wird z. B. für die den obigen Bedingungen genügende Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1-z^2} \cdot \frac{1}{x}$$

das particuläre Integral

$$z = \sin \log x$$

das Abel'sche Theorem in der Form liefern

$$z_3 = z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2},$$

wenn

$$x_3 = x_1 x_2$$

ist.

Ich füge hier noch eine Eigenschaft der durch die Differentialgleichung (17) definirten Functionen hinzu; da die Differentialien $\frac{dz}{\mu(z)}$ und $\lambda(x)\,dx$ erster Gattung vom Geschlechte 1 sein sollten, so wird man die Differentialgleichung auf die Form

$$(20) \dots \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{(1-u^2)(1-c^2u^2)}}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}$$

bringen können, aus welcher mit Zuordnung von $t=0$, $u=0$

$$u = \operatorname{sinam}\left[\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}},\ c\right] = F(t)$$

folgt; nun bleibt u unverändert, wenn das Argument um die zum Integralmodul c gehörigen Periodicitätsmoduln ω und ω' vermehrt wird, und man hat daher, wenn

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}} + m\omega + n\omega' = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\varkappa^2\tau^2)}},$$

oder

$$t = \operatorname{sinam}(v, \varkappa) \quad \text{also} \quad \tau = \operatorname{sinam}(v + m\omega + n\omega', \varkappa)$$

und

$$\operatorname{sinam}(m\omega + n\omega', \varkappa) = A$$

gesetzt wird,

$$\tau = \frac{t\sqrt{(1-A^2)(1-\varkappa^2A^2)} + A\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}{1-\varkappa^2A^2t^2};$$

es ergiebt sich somit für u als Function von t die durch die nachfolgende Gleichung ausgedrückte Eigenschaft:

$$F\left(\frac{t\sqrt{(1-A^2)(1-\varkappa^2A^2)} + A\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}{1-\varkappa^2A^2t^2}\right) = F(t),$$

während die oben erwähnte Function sin log t die analoge Gleichung

$$\sin\log(e^{2\varkappa\pi}t) = \sin\log t \, ^{*})$$

liefert, wenn $\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet.

Wir haben bisher von einem Abel'schen Theorem mit der Zahl $p=1$ in dem Sinne gesprochen, dass in die Beziehung (6)

$$Z = f(z_1, z_2)$$

*) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass eine Functionalbeziehung von der Form $f(\mu t) = f(t)$, wie sie oben für die sin log-Function besteht, nicht etwa die Existenz eines Abel'schen Theorems von der oben angegebenen Gestalt nach sich zieht, wie ja schon daraus ersichtlich ist, dass lineare Differentialgleichungen die Eigenschaft haben, dass ein Fundamentalintegral bei der Umkreisung eines singulären Punktes in den μ-fachen Werth übergeht, so dass, wenn die Umkehrungsfunction des particulären Integrales $z = \varphi(x)$ mit $x = f(z)$ bezeichnet wird, $f(\mu z) = f(z)$ sich ergiebt, und doch haben, wie oben gezeigt worden ist, irreductible Differentialgleichungen höherer Ordnung als der ersten kein Abel'sches Theorem von dieser Art.

die unabhängigen Variabeln nicht eintreten sollen, doch sieht man leicht, dass es auch andere algebraische Beziehungen für das Integral einer Differentialgleichung giebt, für welche ebenfalls noch $p = 1$ ist. Sei z. B. y eine algebraische Function von x, so wird die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(21) \cdots \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = y,$$

deren allgemeines Integral die Form hat

$$z = cx + x\int \frac{y}{x}\,dx,$$

die Eigenschaft besitzen, dass, wenn $x_1, x_2, \cdots x_\lambda$ beliebige Argumente, $X_1, X_2, \cdots X_p$ p andere in bestimmter Weise von jenen algebraisch abhängige bedeuten, und $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$, $Z_1, Z_2, \cdots Z_p$ die entsprechenden Werthe irgend eines der particulären Integrale darstellen,

$$\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} + \cdots + \frac{z_\lambda}{x_\lambda} = \frac{Z_1}{X_1} + \frac{Z_2}{X_2} + \cdots + \frac{Z_p}{X_p} + C$$

ist, wenn $\int \frac{y}{x}\,dx$ ein Abel'sches Integral erster Gattung ist, und wenn somit das Geschlecht der algebraischen Function 1 ist,

$$(22) \cdots \frac{Z_1}{X_1} = \frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} + c,$$

also ein Theorem der bezeichneten Art, in welches die unabhängigen Variabeln selbst eintreten. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass ein ähnliches Theorem für jede lineare Differentialgleichung erster Ordnung von der Form gilt:

$$\frac{dz}{dx} - z\frac{d\log y_1}{dx} = y,$$

in welcher y_1 eine algebraische Function von x bedeutet. Sind die für die obige Differentialgleichung in Frage kommenden Abel'schen Integrale nicht erster Gattung, so treten nur noch algebraisch-logarithmische Theile hinzu.

Endlich mag noch hervorgehoben werden, dass ein Abel'sches Theorem dieser Form nicht auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt ist; denn sei z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

vorgelegt, deren allgemeines Integral

$$z = x\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} - \tfrac{1}{2}\arcsin x^2 + cx + c_1$$

ist, so ist unmittelbar zu sehen, dass das zugehörige Abel'sche Theorem die Form hat

$$\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} = \frac{Z}{X} - \frac{1}{2}\frac{\arcsin x_1^2}{x_1} - \frac{1}{2}\frac{\arcsin x_2^2}{x_2} + \frac{1}{2}\frac{\arcsin X^2}{X} + \varphi(x_1, x_2, X),$$

worin φ eine lineare gebrochene Function der Argumente vorstellt, und

$$X = \frac{x_1 \sqrt{1-x_2^4} + x_2 \sqrt{1-x_1^4}}{1+x_1^2 x_2^2}$$

ist; die arc sin-Functionen treten hier wie die Logarithmen beim Abel'schen Theorem für Abel'sche Integrale dritter Gattung auf.

Gehen wir also wieder zur allgemeinen Untersuchung zurück und erörtern nunmehr die Frage, für welche Differentialgleichungen ein particuläres Integral die Eigenschaft hat, dass zwischen zweien seiner Werthe z_1 und z_2 für die unabhängigen Variabeln x_1 und x_2 und seinem Werthe Z für die Variable X, welche mit x_1 und x_2 durch die Gleichung

$$(23) \cdots\cdot X = \varphi(x_1, x_2)$$

verbunden ist, eine algebraische Relation

$$(24) \cdots\cdot Z = f(z_1, z_2, x_1, x_2)$$

bestehe. Die Differentiation von (24) nach x_1 und x_2 liefert

$$\frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2},$$

und die Elimination von $\frac{dZ}{dX}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}\right)\frac{\partial X}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2}\right)\frac{\partial X}{\partial x_1},$$

woraus sich wieder, wenn x_2 und z_2 als Parameter betrachtet werden, folgern lässt, *dass z_1 als Function von x_1 aufgefasst, einer Differentialgleichung erster Ordnung genügen muss, und somit irreductible Differentialgleichungen von einer höheren Ordnung als der ersten ein durch die Gleichung* (24) *dargestelltes Abel'sches Theorem nicht besitzen können.* Verfährt man mit einer solchen Differentialgleichung erster Ordnung genau wie mit Gleichung (8) geschehen, so ergeben sich statt der Gleichungen (13) und (14) für ein beliebiges, aber festgewähltes x_2 die Beziehungen

$$Z = f(z_1, C, x_1) \quad \text{und} \quad Z_0 = f(z_1, C_0, x_1),$$

aus denen durch Zusammenstellung mit (23) x_1 und z_1 eliminirt werden können, und es folgt somit

$$(25) \cdots\cdot Z = \psi(Z_0, X, C),$$

d. h. *es wird das allgemeine Integral jener Differentialgleichung eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten sein, in welcher die unabhängige Variable im Allgemeinen auch explicite enthalten ist.*

So besteht für die oben behandelte Differentialgleichung erster Ordnung (21) zwischen ihrem allgemeinen Integrale z und einem particulären z_0 der algebraische Zusammenhang

$$z = z_0 + (c - c_0)x^*).$$

*) Es mag hier die folgende Bemerkung hinzugefügt werden, welche sich auf den Zusammenhang des allgemeinen und eines particulären Integrales einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\alpha) \cdots \cdot \frac{dz}{dx} + zy = y_1$$

bezieht, in der y und y_1 algebraische Functionen von x bedeuten, und deren Integral bekanntlich

$$(\beta) \cdots \cdot z = ce^{-\int y\,dx} + e^{-\int y\,dx}\int y_1 e^{\int y\,dx} dx$$

ist. Soll zwischen z und einem particulären Integrale z_0 eine algebraische Beziehung bestehen von der Form

$$(\gamma) \cdots \cdot z = F(x, z_0, c),$$

so muss sich wegen der unmittelbar ersichtlichen Gleichung

$$(\delta) \cdots \cdot z = z_0 + (c - c_0)\, e^{-\int y\,dx}$$

die Beziehung

$$(\varepsilon) \cdots \cdot F(x, z_0, c) = z_0 + (c - c_0)\, e^{-\int y\,dx}$$

ergeben; diese Gleichung ist nun entweder eine in z_0 identische oder eine die Grösse z_0 bestimmende algebraische Gleichung — im ersteren Falle würde sich $e^{-\int y\,dx}$ als algebraische Function von x ergeben, und umgekehrt sieht man aus (δ), dass, wenn diese Exponentialfunction algebraisch ist, ein linearer algebraischer Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale stattfindet — im zweiten Falle würde sich aus (ε) z_0 als algebraische Function von x und $e^{-\int y\,dx}$ ergeben, oder es wären nach (β) die Functionen

$$H_1 = \int y_1 e^{\int y\,dx} dx \quad \text{und} \quad G_1 = e^{\int y\,dx}$$

algebraisch von einander abhängig. Beachtet man aber, dass in der in § 2 für die Gleichungen (10) und (11) angestellten Untersuchung über den algebraischen Zusammenhang der Grössen G und H alle Schlüsse unverändert bleiben, wenn wir G und H durch G_1 und H_1 ersetzen, so dass die Gleichung (15) daselbst in

$$\int y_1 e^{\int y\,dx} dx = A e^{\int y\,dx} + B$$

übergeht, und somit — wie dort in (16) — erfordert wird, dass die vorgelegte Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + zy = y_1$$

ein algebraisches Integral besitzt, so folgt der Satz:

dass in einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dz}{dx} + zy = y_1$ *dann und nur dann eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen, einem particulären Integrale und der Variabeln x besteht, wenn entweder* $e^{\int y\,dx}$ *eine*

Beschäftigen wir uns nunmehr mit denjenigen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeines Integral sich algebraisch mit Hülfe der Variabeln und einer willkürlichen Constanten durch *ein* particuläres Integral ausdrücken lässt, und fragen wir zuerst nach solchen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(26) \cdots \frac{dz}{dx} = F(x, z),$$

für welche sich das allgemeine Integral als *ganze* Function *eines* particulären Integrales mit variabeln Coefficienten darstellen lässt; sei diese Beziehung

$$(27) \cdots z = \varphi_0(x, c) z_0^m + \varphi_1(x, c) z_0^{m-1} + \cdots + \varphi_m(x, c) = \varphi(z_0, x, c),$$

in welcher c eine willkürliche Constante, und $\varphi_\alpha(x, c)$ algebraische Functionen von x und c bedeuten, so wird nach der in § 6 zu den Gleichungen (52) und (53) hinzugefügten Anmerkung die identische Gleichung bestehen müssen

$$z_0 = \varphi\big(\varphi(z_0, x, \varkappa), x, c\big)$$

oder

$$z_0 = \varphi_0(x, c)\left\{\varphi_0(x, \varkappa) z_0^m + \cdots + \varphi_m(x, \varkappa)\right\}^m$$

$$+ \varphi_1(x, c)\left\{\varphi_0(x, \varkappa) z_0^m + \cdots + \varphi_m(x, \varkappa)\right\}^{m-1} + \cdots + \varphi_m(x, c),$$

und somit, wenn $m > 1$, da z_0 kein algebraisches Integral sein soll,

$$\varphi_0(x, c)\, \varphi_0(x, \varkappa)^m = 0;$$

da aber $\varphi_0(x, c)$ für ein willkürliches c nicht verschwinden kann, weil sonst z_0 nur vom $m - 1^{\text{ten}}$ Grade wäre, andererseits aber auch $\varphi_0(x, \varkappa)$ nicht Null sein kann, da $\varkappa$ als Function von c ebenfalls eine willkürliche Grösse ist, so muss $m = 1$ sein, und *es giebt somit keine anderen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function eines nicht algebraischen particulären Integrales sein soll, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, als solche, für welche diese Relation eine ganze lineare ist.*

Sei nun diese Beziehung

$$(28) \cdots z = Cz_0 + C_1,$$

algebraische Function von x ist oder die Differentialgleichung selbst ein algebraisches particuläres Integral besitzt; in beiden Fällen ist diese Beziehung eine lineare von der Form $Az + A_0 z_0 = \omega(x)$, wenn $\omega(x)$ eine algebraische Function von x, A und A_0 Constanten bedeuten, in denen die willkürliche Integrationsconstante enthalten ist.

worin C und C_1 algebraische Functionen von x und der willkürlichen Constanten bedeuten, so erhält man wegen

$$\frac{dz}{dx} = C\frac{dz_0}{dx} + z_0\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx}$$

nach (26) die Beziehungen

$$\frac{dz_0}{dx} = F(x, z_0), \quad C\frac{dz_0}{dx} + z_0\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx} = F(x, Cz_0 + C_1),$$

oder

$$(29) \cdots\cdot F(x, Cz_0 + C_1) = CF(x, z_0) + z_0\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx}.$$

Da nun z_0 kein algebraisches Integral ist, die Gleichung (29) somit eine in z_0 identische sein muss, so wird man diese nach z_0 und c differentiiren dürfen und erhält leicht*) durch Elimination von $\frac{\partial F(x, Cz_0 + C_1)}{\partial(Cz_0 + C_1)}$ für $F(x, z_0)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F(x, z_0)}{\partial z_0} + F(x, z_0)\frac{\partial}{\partial z_0}\log\frac{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial z_0}}{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial c}} = -\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial z_0}}{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial c}},$$

welche integrirt

$$(30) \cdots\cdot F(x, z_0) = M\left(z_0\frac{\partial C}{\partial c} + \frac{\partial C_1}{\partial c}\right)$$

$$-\frac{\left(z_0\frac{\partial C}{\partial c} + \frac{\partial C_1}{\partial c}\right)}{C}\int\frac{z_0\left(\frac{\partial C}{\partial c}\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial c}\right) + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial c} - C\frac{\partial^2 C_1}{\partial x\,\partial c}}{\left(z_0\frac{\partial C}{\partial c} + \frac{\partial C_1}{\partial c}\right)^2}dz_0$$

liefert, worin M im Allgemeinen von x abhängig ist; da nun aber $F(x, z_0)$ eine algebraische Function von x und z_0 sein soll, so muss, wie leicht zu sehen,

$$\frac{\partial C}{\partial c}\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial c} = -C^2\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{C}\right] = 0,$$

also $\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{C}$ von c unabhängig, d. h.

$$C = \chi(c)\,\psi(x)$$

sein, worin χ und ψ noch willkürliche algebraische Functionen bedeuten, und es folgt somit unmittelbar aus (30), dass $F(x, z_0)$ eine lineare Function von z_0 wird, und daher die Differentialgleichung die Form haben muss

$$(31) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = Mz + N;$$

*) Wir werden diese Untersuchung gleich nachher für eine beliebige algebraische Relation zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale durchführen.

zugleich ergiebt sich durch Einsetzen des Werthes $F(x, z_0) = Mz_0 + N$ in die Functionalgleichung (29), dass $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$, d. h. die Grösse C in der Relation zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale $z = Cz_0 + C_1$ eine Constante ist. Wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function eines particulären Integrales sein soll, deren Coefficienten von der willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist die der linearen, und zwar mit der linearen Beziehung $z = Cz_0 + C_1$, worin C eine Constante und C_1 eine algebraische Function von x ist.

Nun war aber in der vorhergegangenen Anmerkung gezeigt worden, dass, wenn in einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung (31) eine algebraische Beziehung — und zwar wurde nachgewiesen, dass es nothwendig eine lineare war — zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale bestehen sollte, entweder $e^{\int M dx}$ eine algebraische Function sein musste, oder die Differentialgleichung selbst ein algebraisches Integral besass. Ist das erstere der Fall, und wird

$$e^{\int M dx} = y, \quad \int \frac{N}{y} dx = y_1$$

gesetzt, worin y eine algebraische Function und y_1 ein Abel'sches Integral ist, so hat das Integral der Differentialgleichung die Form

$$z = \mu y + y y_1 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{z}{y} - \mu,$$

worin μ eine Constante bedeutet, und hieraus geht unmittelbar hervor, dass z ein Abel'sches Theorem von der Form

$$\frac{z'}{y'} + \frac{z''}{y''} + \cdots + \frac{z^{\lambda}}{y^{(\lambda)}} = \frac{Z_1}{Y_1} + \frac{Z_2}{Y_2} + \cdots + \frac{Z_p}{Y_p} + \text{alg. log.}$$

besitzt; im zweiten Falle, in dem die Differentialgleichung ein algebraisches Integral $z = \zeta$ besitzt, wird für ein bestimmtes ν

$$\zeta = \nu e^{\int M dx} + e^{\int M dx} \int N e^{-\int M dx} dx$$

sein, und das allgemeine Integral nimmt somit die Form an

$$z = \zeta + (c - \nu) e^{\int M dx};$$

da aber $e^{\int M dx}$ ein Abel'sches Theorem in der Form der Gleichung (2) oder (3) besitzt, so wird z. B. für den Fall der Gleichung (2)

$$(z^{(1)} - \zeta^{(1)})(z^{(2)} - \zeta^{(2)}) \cdots (z^{(\lambda)} - \zeta^{(\lambda)})(Z_1 - \zeta_1)^{-1}(Z_2 - \zeta_2)^{-1} \cdots (Z_p - \zeta_p)^{-1} = C$$

sein, und *es wird somit die Annahme, dass für eine Differentialgleichung erster Ordnung das allgemeine Integral eine ganze rationale Function*

eines particulären mit variabeln Coefficienten ist, in allen Fällen zu einem Abel'schen Theorem führen.

Soll nun für eine Differentialgleichung erster Ordnung überhaupt das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären also

$$z = \varphi(z_0, x, c)$$

sein, so wird aus der Zusammenstellung der Gleichungen

$$\frac{dz_0}{dx} = F(x, z_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \frac{dz_0}{dx} = \frac{dz}{dx} = F(x, z)$$

wieder

$$F\big(x, \varphi(z_0, x, c)\big) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} F(x, z_0),$$

und durch Differentiation dieser nach z_0 und c und Elimination von $\frac{\partial F(x, \varphi(x, z_0, c))}{\partial \varphi(x, z_0, c)}$ die für jedes z_0 geltende Bestimmungsgleichung für $F(x, z_0)$ folgen

$$\frac{\partial F(x, z_0)}{\partial z_0} + F(x, z_0) \frac{\partial}{\partial z_0} \log \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}} = - \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}},$$

also durch Integration

$$(32) \cdots\cdot F(x, z_0) = M \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}} dz_0,$$

worin M eine noch willkürliche Function von x und c ist, und $F(x, z_0)$ der Bedingung zu unterwerfen ist, dass es eine algebraische Function seiner Variabeln sein soll.

Werfen wir speciell die Frage nach einer rational gebrochenen Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale auf und fassen die bekanntlich wiederum — wie oben für die Gleichung (27) — geltende Beziehung

$$z_0 = \varphi\big(\varphi(z_0, x, \varkappa), x, c\big)$$

in der Weise auf, dass die Gleichung

$$z_0 = \varphi(z, x, c)$$

zu einer ihrer Auflösungen die Grösse

$$z = \varphi(z_0, x, \varkappa)$$

haben soll, so wird für die Annahme einer rational gebrochenen Beziehung die Gleichung

$$(33) \cdots\cdot z_0 = \frac{A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_m}{B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \cdots + B_n}$$

lauten, und eine ihrer Auflösungen

$$(34) \cdots\cdot z = \frac{a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z_0^n + b_1 z_0^{n-1} + \cdots + b_n}$$

sein, wenn $a_0, a_1, \cdots a_m, b_0, b_1, \cdots b_n$ dieselben algebraischen Functionen von x und $\varkappa$ bedeuten, wie es $A_0, A_1, \cdots A_m, B_0, B_1, \cdots B_n$ von x und c sind, oder es wird (34) in (33) eingesetzt eine identische Gleichung liefern müssen, da z_0 nicht eine algebraische Function von x sein soll. Ordnet man die Gleichung (33) nach Potenzen von z, so sieht man, dass z, wenn $m > n$, für kein endliches z_0, wenn $m < n$ nur für $z_0 = 0$, und wenn $m = n$ nur für *einen* Werth von z_0 unendlich werden kann; da aber (34) eine gebrochene Function von z_0 ist, so ist der Fall $m > n$ nach dem eben hervorgehobenen von selbst ausgeschlossen, und es muss der Nenner von z die n^{te} Potenz einer linearen Function von z_0 sein. Ferner wird $z = 0$ für den durch die Beziehung $A_m - B_n z_0 = 0$ definirten Werth von z_0 oder für $z_0 = \infty$, und es wird daher der Zähler von z die m^{te} Potenz dieser linearen Function von z_0 sein müssen, so dass sich, je nachdem $m < n$ oder $m = n$, die beiden Formen für z ergeben

$$z = \frac{(a_0 z_0 + a_1)^m}{z_0^n} \quad \text{oder} \quad z = \left(\frac{a_0 z_0 + a_1}{b_0 z_0 + b_1}\right)^m;$$

man sieht nun unmittelbar, dass diese beiden Beziehungen mit den entsprechenden

$$z_0 = \frac{(A_0 z + A_1)^m}{z^n} \quad \text{oder} \quad z_0 = \left(\frac{A_0 z + A_1}{B_0 z + B_1}\right)^m$$

nur für den zweiten Fall und zwar nur für $m = 1$ zusammen bestehen können, und findet daher als einzig möglichen Fall die linear gebrochene Beziehung.

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function eines particulären sein soll, deren Coefficienten von der willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist diejenige, für welche diese rationale Function eine lineare ist.

Aber es lässt sich auch leicht die nothwendige Form dieser Differentialgleichungen erster Ordnung angeben, welche eine derartige Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale liefern können; denn setzt man in (32)

$$\varphi(z_0, x, c) = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta},$$

so folgt leicht

$$(35) \cdots\cdot F(x, z_0) = \frac{(\gamma z_0 + \delta)\left(z_0 \frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{\partial \beta}{\partial c}\right) - (\alpha z_0 + \beta)\left(z_0 \frac{\partial \gamma}{\partial c} + \frac{\partial \delta}{\partial c}\right)}{\alpha\delta - \beta\gamma} \Bigg\{ M + \frac{\partial J}{\partial a}$$

wenn

$$J = (\alpha\delta - \beta\gamma)\int \frac{dz_0}{(\gamma z_0 + \delta)\left(z_0 \frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{\partial \beta}{\partial c}\right) - (\alpha z_0 + \beta)\left(z_0 \frac{\partial \gamma}{\partial c} + \frac{\partial \delta}{\partial c}\right)}$$

gesetzt wird. Da nun im Allgemeinen

$$J = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}} \frac{1}{a - b} \log \left\{\frac{z_0 - a}{z_0 - b}\right\}$$

sein wird, worin a und b algebraische Functionen von x und c bedeuten, so muss, da $F(x, z_0)$ eine algebraische Function von x und z_0 sein soll,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\left(\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right)(a - b)}\right] = 0$$

sein, und somit, wie leicht zu sehen,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{a - b} \frac{(z_0 - a)\frac{\partial b}{\partial x} - (z_0 - b)\frac{\partial a}{\partial x}}{(\gamma z_0 + \delta)\left(z_0 \frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{\partial \beta}{\partial c}\right) - (\alpha z_0 + \beta)\left(z_0 \frac{\partial \gamma}{\partial c} + \frac{\partial \delta}{\partial c}\right)},$$

wonach sich $F(x, z_0)$ nach Gleichung (35) als ganze Function zweiten Grades in z_0 ergiebt, deren Coefficienten noch willkürliche algebraische Functionen von x sind. Waren die Grössen a und b einander gleich, so ergiebt sich

$$J = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}} \frac{1}{z_0 - a},$$

und da hieraus

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{1}{z_0 - a} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}}\right] - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}} \frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{(z_0 - a)^2}$$

folgt, so erhalten wir wiederum nach Gleichung (35) für $F(x, z_0)$ eine ganze Function zweiten Grades in z_0.

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function eines particulären sein kann, deren Coefficienten von den unabhängigen Variabeln und der Integrationsconstanten algebraisch abhängen, ist von der Form $\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C$, *worin* A, B, C *algebraische Functionen von* x *bedeuten, und zwar wird dann zwischen diesen Integralen nur eine lineare Relation mit im Allgemeinen von* x *algebraisch abhängigen Coefficienten stattfinden können.*

Sei z. B. die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(36) \cdots \quad \frac{dz}{dx} + z^2 + xz + \frac{x^2}{4} = 0$$

vorgelegt, deren allgemeines Integral

$$(37) \cdots\cdot z = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{ce^{x\sqrt{2}}+1}{ce^{x\sqrt{2}}-1}$$

ist, so besteht, wenn z_0 irgend ein particuläres transcendentes Integral dieser Differentialgleichung bedeutet, zwischen dem allgemeinen Integral und dem particulären die lineare Beziehung

$$(38) \cdots\cdot \frac{z+\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_0+\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} = C \cdot \frac{z+\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_0+\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

somit eine lineare gebrochene Relation zwischen z und z_0. Zugleich ist aber auch zu sehen, dass für diese Differentialgleichung, weil

$$ce^{x\sqrt{2}} = \frac{z+\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z+\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

ist, ein Abel'sches Theorem für $p=1$ stattfindet, indem für die Argumente x_1, x_2, x_3, welche in der algebraischen Beziehung stehen

$$x_3 = x_1 + x_2,$$

die zu diesen gehörigen Werthe z_1, z_2, Z eines beliebigen Integrales der algebraischen Gleichung genügen

$$(39) \cdots\cdot \frac{Z+\frac{x_3}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{Z+\frac{x_3}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{z_1+\frac{x_1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_1+\frac{x_1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z_2+\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_2+\frac{x_2}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Wir wollen uns, nachdem die nothwendige Form jener Differentialgleichungen gefunden worden, nun mit der Frage beschäftigen, welchen Differentialgleichungen von der Form

$$(40) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C,$$

worin A, B, C algebraische Functionen von x bedeuten, auch wirklich eine lineare Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale entspricht.

Macht man auf (40) die Substitution

$$(41) \cdots\cdot z = -\frac{1}{A} \frac{d \log u}{dx},$$

so geht diese Gleichung bekanntlich über in die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(42) \cdots\cdot \frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0,$$

wenn

$$(43) \cdots\cdot P = -\left(\frac{\frac{dA}{dx}}{A} + B\right), \quad Q = AC$$

gesetzt werden; sind nun u_1 und u_2 zwei particuläre Fundamentalintegrale der Gleichung (42), so wird sich aus dem allgemeinen derselben $C_1 u_1 + C_2 u_2$, wenn $\frac{C_2}{C_1} = c$ gesetzt wird, das allgemeine Integral der Differentialgleichung (40) in der Form ergeben

$$(44) \cdots\cdot z = -\frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{A(u_1 + cu_2)}.$$

Soll nun zwischen z und z_0 ein rationaler linearer Zusammenhang von der Form

$$(45) \cdots\cdot z = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

bestehen, so muss nach (44) auch

$$(46) \cdots\cdot \frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{A(u_1 + cu_2)} = \frac{\alpha\left(\frac{du_1}{dx} + c_0\frac{du_2}{dx}\right) - \beta A(u_1 + c_0 u_2)}{-\gamma\left(\frac{du_1}{dx} + c_0\frac{du_2}{dx}\right) + \delta A(u_1 + c_0 u_2)}$$

oder

$$(47) \cdots\cdot \gamma \frac{d\log(u_1 + cu_2)}{dx}\,\frac{d\log(u_1 + c_0 u_2)}{dx} - \delta A \frac{d\log(u_1 + cu_2)}{dx}$$
$$+ \alpha A \frac{d\log(u_1 + c_0 u_2)}{dx} - \beta A^2 = 0$$

sein — worin der Fall, in dem A, B, C Constanten sind, als ein specieller Fall der Gleichung (16) ausgeschlossen werden darf.

Sind z_1 und z_2 irgend zwei von einander verschiedene Integrale der Gleichung (40), so werden nach (41) die beiden entsprechenden Werthe von u

$$(48) \cdots\cdot u_1 = e^{-\int A z_1 dx} \quad \text{und} \quad u_2 = e^{-\int A z_2 dx}$$

stets als Fundamentalintegrale der Gleichung (42) aufgefasst werden dürfen, da

$$c_1 e^{-\int A z_1 dx} + c_2 e^{-\int A z_2 dx} = 0$$

die Identität von z_1 und z_2 voraussetzen würde, und nimmt man nun an, die Differentialgleichung (40) habe zwei algebraische Integrale ζ_1 und ζ_2, so wird nach (48)

$$(A) \cdots\cdot \frac{du_1}{dx} = -A\zeta_1 u_1 \quad \text{und} \quad \frac{du_2}{dx} = -A\zeta_2 u_2$$

sein, und somit die Gleichung (46) in

$$(49) \cdots\cdot \frac{\zeta_1 u_1 + c\zeta_2 u_2}{u_1 + cu_2} = \frac{\alpha(\zeta_1 u_1 + c_0\zeta_2 u_2) + \beta(u_1 + c_0 u_2)}{\gamma(\zeta_1 u_1 + c_0\zeta_2 u_2) + \delta(u_1 + c_0 u_2)}$$

übergehen, oder in

$$(50) \cdots\cdot u_1^2 [\gamma \zeta_1^2 + (\delta - \alpha) \zeta_1 - \beta] + u_1 u_2 [c(\gamma \zeta_1 \zeta_2 + \delta \zeta_2 - \alpha \zeta_1 - \beta) + \\ + c_0 (\gamma \zeta_1 \zeta_2 + \delta \zeta_1 - \alpha \zeta_2 - \beta)] + u_2^2 c c_0 [\gamma \zeta_2^2 + (\delta - \alpha) \zeta_2 - \beta] = 0.$$

Bestimmt man nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so, dass diese Gleichung identisch erfüllt wird, so folgt

$$(51) \cdots\cdot \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{1}{\zeta_1 \zeta_2}, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{c_0 \zeta_1 - c \zeta_2}{(c - c_0) \zeta_1 \zeta_2}, \quad \frac{\delta}{\beta} = \frac{c \zeta_1 - c_0 \zeta_2}{(c - c_0) \zeta_1 \zeta_2},$$

also stets endliche Ausdrücke, und, da (50) nur eine Umformung von (49) ist, so wird, wenn u_1 und u_2 Integrale der Gleichungen (A) sind, die Gleichung (50) für die gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auch durch die Gleichung (46) ersetzt werden können, d. h. es wird für die Gleichung (40) die algebraische Beziehung (45) gültig sein, welche die Form annimmt:

$$(52) \cdots\cdot z = \frac{(c_0 \zeta_1 - c \zeta_2) z_0 + (c - c_0) \zeta_1 \zeta_2}{(c_0 - c) z_0 + c \zeta_1 - c_0 \zeta_2}.$$

Wir finden somit, *dass, wenn die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung* (40) *zwei particuläre algebraische Integrale besitzt, stets eine lineare Beziehung mit algebraischen Coefficienten zwischen ihrem allgemeinen und einem transcendenten particulären Integrale besteht, vorausgesetzt, dass ein solches existirt.*

So hat z. B. die Differentialgleichung (36) die beiden den constanten $c = 0$ und $c = \infty$ entsprechenden algebraischen Integrale

$$\zeta_1 = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_2 = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}},$$

und die aus (52) sich ergebende Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale

$$z = \frac{\left(\frac{x}{2} - C_1 \sqrt{\frac{1}{2}}\right) z_0 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}}{-z_0 - \frac{x}{2} - C_1 \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

fällt mit der oben gefundenen Gleichung (38) zusammen, wenn

$$\frac{C+1}{C-1} = C_1$$

gesetzt wird.

In dem Falle, dass ζ_1 und ζ_2 zwei algebraische Integrale der Gleichung (40) waren, wurde durch die gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Gleichung (50) identisch befriedigt, und es brauchte somit nicht $\frac{u_1}{u_2}$ dieser Gleichung gemäss eine algebraische Function zu sein, sowie in der That in unserem Beispiel

$$\frac{u_1}{u_2} = e^{-\int A(\zeta_1 - \zeta_2)\, dx} = e^{-\sqrt{2} \int dx} = e^{-\sqrt{2} \cdot x}$$

ist; andererseits sieht man aber umgekehrt leicht, dass, wenn u_1 und u_2 so beschaffen sind, dass ihr Quotient algebraisch ist, also

$$e^{-\int A(\zeta_1-\zeta_2)\,dx} = \varphi(x)$$

ist, worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function bedeutet,

$$A(\zeta_1 - \zeta_2) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

also $\zeta_1 - \zeta_2$ selbst algebraisch ist; da aber nach (40)

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = A\zeta_1^2 + B\zeta_1 + C, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = A\zeta_2^2 + B\zeta_2 + C,$$

also

$$\frac{d(\zeta_1 - \zeta_2)}{dx} = A(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2) + B(\zeta_1 - \zeta_2)$$

ist, so folgt hieraus, dass auch $\zeta_1 + \zeta_2$ eine algebraische Function, also ζ_1 und ζ_2 selbst algebraische Integrale der Gleichung (40) sein müssen.

Es ist aber leicht zu sehen, *dass in allen Fällen, in welchen die Differentialgleichung* (40) *zwei algebraische Integrale* ζ_1 *und* ζ_2 *hat, jedes transcendente Integral derselben ein Abel'sches Theorem besitzt*; denn da nach (44), wenn

$$u_1 = e^{-\int A\zeta_1\,dx}, \quad u_2 = e^{-\int A\zeta_2\,dx}$$

gesetzt wird,

$$z = \frac{\zeta_1 u_1 + c\zeta_2 u_2}{u_1 + cu_2} = \frac{\zeta_1 \frac{u_1}{u_2} + c\zeta_2}{\frac{u_1}{u_2} + c},$$

oder

$$\frac{u_1}{u_2} = e^{-\int A(\zeta_1 - \zeta_2)\,dx} = c \cdot \frac{\zeta_2 - z}{z - \zeta_1}$$

wird, und der Voraussetzung nach ζ_1 und ζ_2 algebraische Functionen von x sind, so ist $\frac{u_1}{u_2}$ eine Exponentialgrösse, deren Exponent ein Abel'sches Integral ist, und nachdem oben in Gleichung (2) oder (3) das Abel'sche Theorem für solche Exponentialfunctionen entwickelt worden, so folgt aus der obigen Gleichung, dass, wenn z. B. das Integral der Exponentialfunction ein solches erster Gattung ist, und die zu den Argumenten $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ gehörigen Werthe irgend eines Integrales z der Differentialgleichung (40) mit $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots z^{(\mu)}$ und die zugehörigen ζ-Werthe mit $\zeta_\alpha^{(1)}, \zeta_\alpha^{(2)}, \cdots \zeta_\alpha^{(\mu)}$, ferner die den in bekannter Weise algebraisch abhängigen Argumenten $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_p$ zugehörigen Werthe mit $z^{(I)}, z^{(II)}, \cdots z^{(P)}, \zeta_\alpha^{(I)}, \zeta_\alpha^{(II)}, \cdots \zeta_\alpha^{(P)}$ bezeichnet werden, das Abel'sche Theorem in der Form

$$\frac{\zeta_2^{(1)} - z^{(1)}}{z^{(1)} - \zeta_1^{(1)}} \cdot \frac{\zeta_2^{(2)} - z^{(2)}}{z^{(2)} - \zeta_1^{(2)}} \cdots \frac{\zeta_2^{(\mu)} - z^{(\mu)}}{z^{(\mu)} - \zeta_1^{(\mu)}} \cdot \frac{z^{(I)} - \zeta_1^{(I)}}{\zeta_2^{(I)} - z^{(I)}} \cdots \frac{z^{(P)} - \zeta_1^{(P)}}{\zeta_2^{(P)} - z^{(P)}} = C.$$

Dass es aber auch Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form (40) giebt, die nicht zwei algebraische Integrale besitzen, und für welche dennoch das allgemeine Integral eine gebrochene lineare Function eines particulären mit variablen Coefficienten ist, sieht man z. B. aus der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = z^2 - \frac{1}{x} z,$$

deren allgemeines Integral

$$z = \frac{1}{cx - x \log x}$$

ist, und für welche der gesuchte Zusammenhang

$$z = \frac{z_0}{(c - c_0) x z_0 + 1}$$

ist.

Hat also die Differentialgleichung (40) nicht zwei algebraische Integrale, so wird sich die geforderte Beziehung (45) in die Form setzen lassen

$$(53) \cdots \frac{\zeta_1 e^{-\int A \zeta_1 dx} + c \zeta_2 e^{-\int A \zeta_2 dx}}{e^{-\int A \zeta_1 dx} + c e^{-\int A \zeta_2 dx}} = \frac{\alpha \zeta_1 + \beta}{\gamma \zeta_1 + \delta},$$

wenn ζ_1 irgend ein transcendentes Integral der Differentialgleichung (40) bedeutet, oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{\alpha \zeta_1 + \beta}{\gamma \zeta_1 + \delta} = f(\zeta_1)$$

gesetzt wird, in

$$(54) \cdots e^{-\int A (\zeta_1 - \zeta_2) dx} = - c \cdot \frac{f(\zeta_1) - \zeta_2}{f(\zeta_1) - \zeta_1}$$

übergehen, wobei die Constante c in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, also in $f(\zeta_1)$ enthalten ist. Diese Beziehung muss nun einerseits für beliebige c bestehen, andererseits muss sie nach x logarithmisch differentiirt die in den Grössen ζ_1 und ζ_2 algebraische Beziehung liefern

$$A(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{f'(\zeta_1)(A\zeta_1^2 + B\zeta_1 + C) + \frac{\partial f(\zeta_1)}{\partial x} - (A\zeta_2^2 + B\zeta_2 + C)}{f(\zeta_1) - \zeta_2}$$
$$- \frac{[1 - f'(\zeta_1)](A\zeta_1^2 + B\zeta_1 + C) - \frac{\partial f(\zeta_1)}{\partial x}}{\zeta_1 - f(\zeta_1)}.$$

Untersuchen wir jetzt den Fall, in dem $C = 0$, also die Differentialgleichung (40)

$$(55) \cdots \frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz$$

lautet, so geht dieselbe durch die Substitution $z = \frac{1}{y}$ in die Gleichung

$$(56) \cdots \frac{dy}{dx} + By = - A$$

über, und es folgt, dass, wenn die Gleichung (55) die Eigenschaft haben soll, dass ihr allgemeines Integral eine lineare rationale Function eines particulären mit variabeln Coefficienten sein soll, dasselbe auch

für (56) stattfinden muss; wenn aber für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung überhaupt ein algebraischer Zusammenhang zwischen seinem allgemeinen und einem particulären Integrale existiren soll, so muss dieser, wie oben gezeigt worden, ein ganzer linearer sein von der Form

$$(57) \cdots\cdot y = My_0 + N,$$

worin M eine Constante, N eine algebraische Function von x ist, und zwar konnte dies nur stattfinden, wenn entweder $e^{\int B dx}$ eine algebraische Function von x ist, oder die Differentialgleichung (56) ein algebraisches Integral besitzt. Da nun aber dem Zusammenhange (57) für die Differentialgleichung (55) offenbar die linear gebrochene Beziehung

$$(58) \cdots\cdot z = \frac{z_0}{M + Nz_0}$$

entspricht, so folgt, *dass ein linear gebrochener Zusammenhang für die Gleichung* (55) *nur in der Gestalt* (58) *existiren kann, und dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür entweder erfordern, dass* $e^{\int B dx}$ *eine algebraische Function sei, oder dass die Differentialgleichung* (55) *ein algebraisches Integral besitzt.*

Da nun im ersten Falle, wie oben gezeigt worden, für die Gleichung (56), mit Beschränkung auf Integrale erster Gattung, ein Abel'sches Theorem von der Form existirt

$$y^{(1)} f(x_1) + y^{(2)} f(x_2) + \cdots + y^{(\lambda)} f(x_\lambda)$$
$$= Y_1 f(X_1) + Y_2 f(X_2) + \cdots + Y_p f(X_p),$$

wenn

$$e^{\int B dx} = f(x)$$

gesetzt wird, und $f(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet, im zweiten Falle dagegen das Abel'sche Theorem die Gestalt hat

$$(y^{(1)} - \eta^{(1)})(y^{(2)} - \eta^{(2)}) \cdots (y^{(\lambda)} - \eta^{(\lambda)})(Y_1 - \eta_1)^{-1}(Y_2 - \eta_2)^{-1} \cdots (Y_p - \eta_p)^{-1} = C,$$

worin η das algebraische Integral der Gleichung (56) bedeutet, so wird in den beiden bezeichneten Fällen, dass $e^{\int B dx}$ eine algebraische Function $F(x)$ ist oder die Differentialgleichung (55) ein algebraisches Integral ζ besitzt, ein Abel'sches Theorem existiren und zwar in den resp. Formen

$$\left[z^{(1)} F(x_1)\right]^{-1} + \left[z^{(2)} F(x_2)\right]^{-1} + \cdots + \left[z^{(\lambda)} F(x_\lambda)\right]^{-1}$$
$$= \left[Z_1 F(X_1)\right]^{-1} + \cdots + \left[Z_p F(X_p)\right]^{-1}$$

und

$$\left[\frac{1}{z^{(1)}} - \frac{1}{\zeta^{(1)}}\right]\left[\frac{1}{z^{(2)}} - \frac{1}{\zeta^{(2)}}\right] \cdots \left[\frac{1}{z^{(\lambda)}} - \frac{1}{\zeta^{(\lambda)}}\right]\left[\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\zeta_1}\right]^{-1} \cdots$$
$$\cdots \left[\frac{1}{z_p} - \frac{1}{\zeta_p}\right]^{-1} = C.$$

Hiermit brechen wir die Untersuchung der Fälle ab, in denen für Differentialgleichungen ein Abel'sches Theorem mit der festen Zahl $p = 1$ existiren sollte, und welche unter der Klasse der irreductibeln Differentialgleichungen nur auf solche erster Ordnung führten.

§ 9.

Untersuchungen über das erweiterte Abel'sche Theorem für das Geschlecht $p = 2$; weitere Sätze über den Zusammenhang des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung mit den particulären. Anwendung auf die linearen Differentialgleichungen.

Sei nunmehr die feste Zahl p des gesuchten Abel'schen Theorems für Differentialgleichungen gleich 2, die gesuchte algebraische Beziehung also von der Form

$$(59) \cdots\cdot F(Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3) = 0,$$

worin z_1, z_2, z_3 Werthe eines particulären Integrales einer Differentialgleichung für die von einander unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3, und Z_1, Z_2 Werthe desselben particulären Integrales für die resp. Variabeln X_1 und X_2 vorstellen, welche algebraisch von x_1, x_2, x_3 durch die Gleichungen

$$(60) \cdots\cdot X_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \qquad X_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3)$$

abhängen, und wobei zugelassen wird, dass in die das Abel'sche Theorem darstellende Gleichung (59) auch die unabhängigen Variabeln eintreten können.

Stellt man mit (59) die nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 genommenen Differentialquotienten dieser Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dX_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial Z_2}\frac{dZ_2}{dX_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dX_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial Z_2}\frac{dZ_2}{dX_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dX_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial F}{\partial Z_2}\frac{dZ_2}{dX_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F}{\partial z_3}\frac{dz_3}{dx_3} + \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

zusammen, so kann man aus diesen 4 Gleichungen im allgemeinen noch nicht die 4 Grössen $Z_1, Z_2, \frac{dZ_1}{dX_1}, \frac{dZ_2}{dX_2}$ eliminiren; wenn man jedoch die drei zuletzt erhaltenen Gleichungen resp. nach x_1, x_2, x_3 differentiirt, so erhält man im Ganzen 7 Gleichungen, aus denen man die 6 Grössen

$$Z_1, Z_2, \frac{dZ_1}{dX_1}, \frac{dZ_2}{dX_2}, \frac{d^2Z_1}{dX_1^2}, \frac{d^2Z_2}{dX_2^2}$$

eliminiren kann, und es ergiebt sich eine algebraische Gleichung

von der Form

$$\mathfrak{F}\left(z_1, z_2, z_3, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{dz_3}{dx_3}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}, \frac{d^2z_3}{dx_3^2}, x_1, x_2, x_3\right) = 0,$$

so dass, wenn x_2, x_3, z_2, z_3 und die Differentialquotienten dieser Grössen numerischen Constanten gleich gesetzt werden, z_1 das Integral einer algebraischen Differentialgleichung

$$(61) \cdots\cdot f\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}\right) = 0$$

wird, und *somit ein Abel'sches Theorem für $p = 2$ algebraischen irreductibeln Differentialgleichungen von höherer Ordnung als der zweiten nicht zukommen kann.*

Es bedarf keiner weiteren Ausführung dieses Satzes für beliebige p.

Wir werfen nun die Frage auf, welche Eigenschaft eine Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzen muss, wenn einem ihrer particulären Integrale ein Abel'sches Theorem von der durch die Gleichungen (59) und (60) definirten Form zukommen soll. Beachtet man, dass nach dem Satze I des § 5 in Gleichung (59) für z_2 und z_3 beliebige Integrale der resp. Differentialgleichungen gesetzt werden dürfen, wenn nur für Z_1 und Z_2 passende Integrale substituirt werden, vorausgesetzt, dass — was ja stets von der Gleichung (61) angenommen werden darf — die zu Grunde gelegte Differentialgleichung irreductibel oder wenigstens in Bezug auf den zweiten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist und die in Betracht kommenden Integrale nicht einer Differentialgleichung niederer Ordnung genügen, so folgt, dass, wenn man für z_2 und z_3 die allgemeinen, zu den Argumenten x_2 und x_3 gehörigen Integrale, welche je zwei willkürliche Constanten μ_1, μ_2 und ν_1, ν_2 enthalten, setzt, dann für Z_1 und Z_2 nur passende, zu den Argumenten X_1 und X_2 gehörige Integrale (man kann eine solche continuirliche Reihe von Integralen z_2 und z_3 wählen, dass X_1 und X_2 ihre Werthe beibehalten) zu substituiren sind, deren Integrationsconstanten m_1, m_2 und n_1, n_2 bestimmte Functionen

$$m_1 = \varphi_1(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2), \; m_2 = \varphi_2(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2), \; n_1 = \psi_1(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2),$$
$$n_2 = \psi_2(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2)$$

jener 4 anderen Integrationsconstanten sein werden. Wählen wir nun zwischen den 4 Grössen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 solche zwei feste Beziehungen, dass n_1 und n_2 für alle möglichen Variationen dieser 4 Constanten, von denen also nur noch zwei von einander unabhängig bleiben, dieselben beliebigen, aber fest gegebenen Werthe annehmen, so werden in der Gleichung (59)

$$(62) \cdots\cdot F(Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0$$

z_2 und z_3 zwei willkürliche Constanten bedeuten dürfen, und man wird für zwei specielle Werthepaare derselben, wie eben nachgewiesen, bei verändertem Z_1 dasselbe Z_2 erhalten können, so dass sich die Beziehungen ergeben

$$F(Z_1, \ Z_2, \ z_1, \ C_1, \ \ C_2, \ X_1, \ X_2, \ x_1, \ x_2, \ x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(0)}, Z_2, \ z_1, \ C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ X_1, \ X_2, \ x_1, \ x_2, \ x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(1)}, Z_2, \ z_1, \ C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ X_1, \ X_2, \ x_1, \ x_2, \ x_3) = 0,$$

aus denen sich mit Hülfe der Gleichungen (60) die Grössen Z_2, z_1 X_2, x_1 eliminiren lassen, und somit eine Gleichung

$$(63) \cdots\cdot \ Z_1 = \Phi(Z_1^{(0)}, \ Z_1^{(1)}, \ X_1, \ C_1, \ C_2)$$

folgt, in welcher x_2 und x_3 als willkürliche, aber bestimmt gewählte Parameter auftreten, und welche zeigt, dass *ein Abel'sches Theorem für $p = 2$ nur solchen irreductibeln Differentialgleichungen zweiter Ordnung zukommen kann, bei welchen das allgemeine Integral eine algebraische Function von zwei particulären Integralen und zwei willkürlichen Constanten ist, in welche auch die unabhängige Variable algebraisch eintreten kann.*

Ist die Differentialgleichung, für welche ein Abel'sches Theorem mit der Zahl $p = 2$ bestehen soll, von der ersten Ordnung, so wird man in der algebraischen Beziehung (62) wieder für z_2 und z_3 willkürliche andere Integrale der resp. Differentialgleichungen setzen können, wenn man nur für Z_1 und Z_2 passende Integrale substituirt. Nimmt man nun wieder für z_2 und z_3 die zu x_2 und x_3 gehörigen allgemeinen Integrale, deren willkürliche Constanten mit μ und ν bezeichnet werden mögen, so wird die im allgemeinen Integrale der zu X_2 gehörenden Differentialgleichung vorkommende Constante n eine Function von μ und ν sein, so dass man eine solche Beziehung zwischen μ und ν festsetzen kann, dass n sich nicht ändert, und somit nur *eine* willkürliche Constante in der Gleichung (62) übrig bleibt, die jetzt genau wie oben durch Specialisirung die Gleichungen liefert

$$F(Z_1, \ Z_2, \ z_1, \ C, \ \ a, \ X_1, \ X_2, \ x_1, \ x_2, \ x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(0)}, Z_2, \ z_1, \ C^{(0)}, a, \ X_1, \ X_2, \ x_1, \ x_2, \ x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(1)}, Z_2, \ z_1, \ C^{(1)}, a, \ X_1, \ X_2, \ x_1, \ x_2, \ x_3) = 0,$$

aus denen wiederum durch Elimination von Z_2, z_1, X_2, x_1 mit Hülfe von (60) die Beziehung folgt

$$(64) \cdots\cdot \ Z_1 = \Phi(Z_1^{(0)}, \ Z_1^{(1)}, \ X_1, \ C),$$

welche aussagt, dass *ein Abel'sches Theorem für $p = 2$ nur solchen*

Differentialgleichungen erster Ordnung zukommen kann, bei welchen das allgemeine Integral eine algebraische Function von zwei particulären Integralen und einer willkürlichen Constanten ist, in welche auch die unabhängige Variable algebraisch eintreten kann.

Es mag bemerkt werden, dass das eben angewendete Verfahren in gewissen Fällen nicht nothwendig zu einer Beziehung zu führen braucht, welche das allgemeine Integral mit *zwei* particulären Integralen und einer Constanten verbindet; denn betrachten wir z. B. das Abel'sche Theorem für Integrale algebraischer Functionen, welche zum Geschlechte $p = 2$ gehören, und welches sich in linearer Form folgendermassen ausdrückt

$$(65) \cdots\cdot Z_1 + Z_2 = z_1 + z_2 + z_3,$$

worin die Grenzen der links stehenden Integrale die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten rational aus den Grenzen der rechts stehenden Integrale und der diesen zugehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, so wird, wenn man, wie oben gefordert wurde, die Gleichungen

$$Z_1 + Z_2 = z_1 + C + a \quad \text{und} \quad Z_1^{(0)} + Z_2 = z_1 + C^{(0)} + a$$

bildet, die Zusammenstellung schon dieser beiden Gleichungen durch Abziehen die Elimination von Z_2 und z_1 ermöglichen und

$$Z_1 = Z_1^{(0)} + C - C^{(0)}$$

liefern, so dass, wie es offenbar sein muss, das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x),$$

worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function vom Geschlechte $p = 2$ ist, schon durch *ein* particuläres Integral und eine willkürliche Constante algebraisch ausdrückbar ist.

Dass es aber in der That Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constanten ist, sehen wir an der allgemeinen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(66) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} + f(x)z = \varphi(x),$$

deren allgemeines Integral, wenn

$$e^{-\int f(x)\,dx} = i, \quad e^{-\int f(x)\,dx} \int^x \varphi(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx = J$$

gesetzt wird,

$$z = ci + J$$

ist, welches mit den particulären Integralen

$$z_1 = c_1 i + J, \quad z_2 = c_2 i + J$$

zusammengestellt die Beziehung

$$(67) \cdots\cdot z = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} z_1 + \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} z_2$$

liefert.

Werfen wir jetzt allgemein die Frage auf, für welche Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(68) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = f(x, z)$$

zwischen dem allgemeinen Integrale z und zwei particulären Integralen z_1 und z_2 derselben und einer willkürlichen Constanten eine algebraische Beziehung von der Form besteht

$$(69) \cdots\cdot z = F(z_1, z_2, c),$$

wobei angenommen werden soll, dass die unabhängige Variable in diese Relation nicht eintritt*). Es folgt aus (68) und (69), wie leicht zu sehen,

$$(70) \cdots\cdot \frac{\partial F}{\partial z_1} f(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_2} f(x, z_2) = f\big(x, F(z_1, z_2, c)\big),$$

und da angenommen werden darf, dass nicht schon zwischen z_1 und z_2 ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, weil sonst die Gleichung (69) auf ein Problem des vorigen Paragraphen zurückführt, die Gleichung (70) somit eine in z_1 und z_2 identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach z_1, z_2 und c

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} f(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_1} \frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} f(x, z_2) = \frac{\partial f(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} f(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_2} \frac{\partial f(x, z_2)}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} f(x, z_2) = \frac{\partial f(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial c} f(x, z_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial c} f(x, z_2) = \frac{\partial f(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c},$$

und hieraus die beiden Differentialgleichungen für $f(x, z_1)$ und $f(x, z_2)$

$$\frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right) f(x, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} \log \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right) f(x, z_2)$$

$$\frac{\partial f(x, z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} \right) f(x, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} \log \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} \right) f(x, z_2),$$

welche für jedes z_1 und z_2 stattfinden müssen; betrachten wir daher die erste dieser Gleichungen als eine Differentialgleichung zur Be-

*) Es braucht kaum ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass die Untersuchung des Falles, in welchem mehr als zwei particuläre Integrale in die Beziehung (69) eintreten, genau in derselben Weise geführt werden kann.

stimmung von $f(x, z_1)$ als Function von z_1, indem wir x und z_2 als Parameter auffassen, so liefert die Integration dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(71) \cdots\cdot f(x, z_1) = L \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} f(x, z_2) \int \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} \right) dz_1,$$

worin L eine von x und z_2 algebraisch abhängige Function sein kann, und da man wegen der Unabhängigkeit der linken Seite dieser Gleichung von z_2 für diese Variable auf der rechten Seite irgend einen numerischen Werth z. B. $z_2 = 0$ setzen darf, so folgt, da die F-Function die Variable x nicht explicite enthalten sollte, für $f(x, z_1)$ die Form

$$f(x, z_1) = \varphi(x)\, \varphi_1(z_1) + \psi(x)\, \psi_1(z_1),$$

und somit die *nothwendige Form der Differentialgleichung erster Ordnung*

$$(72) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = \varphi(x)\, \varphi_1(z) + \psi(x)\, \psi_1(z).$$

Wir können aber für die Functionen $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ noch eine weitere Bedingung aufstellen; da nämlich ausser der Gleichung (72), in welcher z das allgemeine Integral bedeuten mag, noch für die particulären Integrale z_1 und z_2 die Beziehungen bestehen müssen

$$(72a) \cdots\cdot \begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = \varphi(x)\, \varphi_1(z_1) + \psi(x)\, \psi_1(z_1) \\ \frac{dz_2}{dx} = \varphi(x)\, \varphi_1(z_2) + \psi(x)\, \psi_1(z_2), \end{cases}$$

so folgt

$$(73) \cdot\cdot [\varphi_1(z_1)\psi_1(z_2) - \varphi_1(z_2)\psi_1(z_1)]dz + [\varphi_1(z_2)\psi_1(z) - \varphi_1(z)\psi_1(z_2)]dz_1 + [\varphi_1(z)\psi_1(z_1) - \varphi_1(z_1)\psi_1(z)]dz_2 = 0,$$

es müssen daher, da diese Differentialgleichung das allgemeine Integral

$$(74) \cdots\cdot z = F(z_1, z_2, c)$$

haben soll, die Functionen φ_1 und ψ_1 der Bedingung der Integrabilität jener Gleichung (73) genügen*), und es muss ausserdem diese

---

*) Es mag hier eine kurze Bemerkung in Betreff der Integrabilitätsbedingung einer Differentialgleichung von der Form

$$(\alpha) \cdots\cdot Z dz + Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 = 0$$

angefügt werden; es ist bekannt, dass man daraus, dass z eine Function der beiden unabhängigen Variabeln z_1 und z_2 sein soll, auf das nothwendige Bestehen der Gleichung

$$(\beta) \cdots\cdot Z_2\left(\frac{\partial Z}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) + Z_1\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z_2}\right) + Z\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\right) = 0$$

geführt wird, und es soll nur hervorgehoben werden, dass daraus, dass z eine

Differentialgleichung ein *algebraisches* allgemeines Integral besitzen — umgekehrt ist aber auch sofort zu sehen, dass, wenn die totale Differentialgleichung (73) ein algebraisches allgemeines Integral besitzt, eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (72),

---

Function der unabhängigen Variabeln z_1 und z_2 sein soll, noch nicht geschlossen werden kann, dass die Gleichung (β) identisch für alle Werthe von z, z_1, z_2 befriedigt sein muss — nur die Annahme, dass z eine Function von z_1 und z_2 und einer *willkürlichen Constanten* sein soll, verlangt das identische Verschwinden von (β), weil sich aus dieser Gleichung z nur als bestimmte Function von z_1 und z_2 ergeben würde, aber jene mit einer willkürlichen Constanten behaftete Function auch in dieser Gleichung enthalten sein muss; desshalb kann aber eine von einer Constanten freie Beziehung zwischen z, z_1, z_2 existiren, welche (α) und (β) befriedigt, ohne dass letztere identisch für alle z, z_1, z_2 erfüllt wird — es kann somit ein von der willkürlichen Constanten freies, also particuläres Integral der Gleichung (α) vorhanden sein, welches auch die Gleichung (β) befriedigen wird, ohne dass diese jedoch identisch erfüllt wird; so wird z. B. die Differentialgleichung

$$zz_1^2dz + zz_2dz_1 - z_2dz_2 = 0$$

das Integral $z = \frac{z_2}{z_1}$ haben, während die Integrabilitätsbedingung (β)

$$-z_2(2zz_1 - z_2) + z^2z_1^2 = 0$$

nicht identisch, aber für $z = \frac{z_2}{z_1}$ erfüllt wird.

Was nun die Gleichung (73) angeht, von der das Integral (74) gegeben ist, so wird die Integrabilitätsbedingung durch dieses mit einer Constanten behaftete Integral nur dann identisch erfüllt sein müssen, wenn z_1 und z_2 als von einander unabhängige Grössen zu betrachten sind, oder wenn die aus den Gleichungen

$$z = F(z_1, z_2, c) \quad \text{und} \quad dz = \frac{\partial F}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2}dz_2$$

entnommenen Werthe von z und dz, welche die Gleichung (73) in

$$(\gamma) \cdot \cdot \cdot \cdot \; P dz_1 + Q dz_2 = 0$$

verwandeln, $P = 0$ und $Q = 0$ identisch für alle z_1 und z_2 liefern und nicht die Gleichung (γ) als eine Differentialgleichung zwischen z_1 und z_2 definiren. Da aber ferner aus (72a) die Beziehung folgt

$$(\delta) \cdot \cdot \cdot \; [\varphi(x)\varphi_1(z_2) + \psi(x)\psi_1(z_2)]dz_1 - [\varphi(x)\varphi_1(z_1) + \psi(x)\psi_1(z_1)]dz_2 = 0,$$

so müsste, wenn nicht $P = 0$, $Q = 0$ wäre,

$$(\varepsilon) \cdot \cdot \cdot \; [\varphi(x)\varphi_1(z_2) + \psi(x)\psi_1(z_2)]Q + [\varphi(x)\varphi_1(z_1) + \psi(x)\psi_1(z_1)]P = 0$$

sein, d. h. es bestünde, da die φ- und ψ-Functionen so wie die Function F algebraische Functionen bedeuten, zwischen z_1, z_2 und x eine algebraische Beziehung, was von vornherein ausgeschlossen war, und da die Gleichung (ε) in den Klammerausdrücken die Grösse x enthält, während P und Q nur von z_1 und z_2 abhängen, so wird diese Gleichung, wie leicht zu sehen, nicht anders identisch verschwinden können, als wenn $P = 0$ und $Q = 0$ ist, wenn schon im vorigen Paragraphen behandelte Fälle der Gleichung (72) ausgeschlossen werden.

as auch die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sein mögen, stets eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale, zwei particulären und einer willkürlichen Constanten liefern wird.

So lautet für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung (66) die Gleichung (73), da $\varphi_1(z) = -z$, $\psi_1(z) = 1$ ist,

$$(z_2 - z_1)dz + (z - z_2)dz_1 + (z_1 - z)dz_2 = 0,$$

welche in der That der Bedingung der Integrabilität genügt und das algebraische allgemeine Integral besitzt

$$z = C(z_1 - z_2) + z_1,$$

welches mit (67) identisch ist.

Untersuchen wir nun die Form der Gleichung (69) näher, in der jetzt die unabhängige Variable x noch explicite vorkommen mag; nach dem Satze II des § 5, auch dort specialisirt für Differentialgleichungen erster Ordnung, wird die Beziehung (69) erhalten bleiben, wenn man für z und z_2 beliebige Integrale der Differentialgleichung (72) setzt, wenn man nur für z_1 ein anderes passendes Integral eben dieser Differentialgleichung substituirt, vorausgesetzt, dass man die Differentialgleichung (68), was geschehen darf, als eine in Bezug auf $\frac{dz}{dx}$ algebraisch irreductible betrachtet, ferner die Integrale z und z_2 transcendente sind und angenommen wird, was selbstverständlich ist, dass nicht schon zwischen z und z_2 eine algebraische Beziehung stattfindet. Setzt man somit in (69) z_1 statt z, während man z_2 unverändert lässt, so wird für z_1 $F(z_1, z_2, \varkappa)$ zu setzen sein, und sich daher

$$(75) \cdots\cdot z_1 = F\big(F(z_1, z_2, \varkappa), z_2, c\big)$$

ergeben. Nehmen wir wiederum an, die Function F sei in Bezug auf z_1 eine ganze Function, so kann, genau wie oben für die Gleichung (27) des § 8, geschlossen werden, dass die Gleichung (75) als eine in z_1 und z_2 identische, wie es sein müsste, nicht bestehen kann, wenn nicht der Grad in Bezug auf z_1 gleich 1 ist, und da dasselbe für z_2 behauptet werden kann, so folgt, *dass für Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function zweier nicht algebraischer particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten sein soll, diese Relation eine in z_1 und z_2 bilineare von der Gestalt*

$$z = m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m$$

ist, worin m_0, m_1, m_2, m im Allgemeinen algebraische Functionen von x sind.

Setzt man nun unter der Voraussetzung, dass die unabhängige Variable x nicht explicite in $F(z_1, z_2, c)$ vorkommen soll, also

m_0, m_1, m_2, m Constanten bedeuten, den eben gefundenen Werth

$$F(z_1, z_2, c) = m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m$$

in die Gleichung (71) ein, so folgt wegen

$$\frac{\partial F}{\partial c} = z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial c}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_1} = m_0 z_2 + m_1,$$

wie man unmittelbar aus der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} dz_1 = -\frac{m_0 z_2 + m_1}{\left(z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right)^2} \frac{\left(\frac{\partial m_1}{dc} \frac{\partial m_2}{\partial c} - \frac{\partial m_0}{\partial c} \frac{\partial m}{\partial c}\right)}{z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{dc}}$$

$$- \frac{m_1 \frac{\partial m_0}{\partial c} - m_0 \frac{\partial m_1}{\partial c}}{\left(z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right)^2} \log \left\{ z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial c} \right\}$$

schliesst, dass, weil $f(x, z_1)$ eine algebraische Function von z_1 sein soll, also das logarithmische Glied fortfallen muss, nothwendig

$$f(x, z_1) = L \frac{z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial c}}{m_0 z_2 + m_1}$$

$$- f(x, z_2) \frac{\frac{\partial m_1}{\partial c} \frac{\partial m_2}{\partial c} - \frac{\partial m_0}{\partial c} \frac{\partial m}{\partial c}}{\left(z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right)^2}$$

ist, sich somit, wenn z_2 irgend einer numerischen Constanten gleich gesetzt wird,

$$f(x, z_1) = M z_1 + N$$

ergiebt, so dass die Differentialgleichung erster Ordnung in

$$\frac{dz}{dx} = Mz + N$$

übergeht, worin M und N noch unbestimmte algebraische Functionen von x sind, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function zweier particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten, nicht von der unabhängigen Variabeln abhängen, ist die der linearen, und zwar ist die Beziehung dann auch eine ganze lineare — und umgekehrt liefert jede lineare Differentialgleichung eine derartige Integralbeziehung.

Es mag schon hier eine Bemerkung hinzugefügt werden, die wir am Ende dieses Paragraphen wieder aufnehmen, und die sich auf das Abel'sche Theorem der durch eine beliebige lineare Differentialgleichung erster Ordnung definirten Function bezieht; wir wollen, da

jede lineare Differentialgleichung erster Ordnung, wie oben gezeigt worden, die Eigenschaft hat, dass ihr allgemeines Integral sich als eine algebraische Function von zwei particulären Integralen und einer willkürlichen Constanten ausdrücken lässt, nunmehr zwei particuläre Integrale als wesentliche Elemente des für diese Gattung von Differentialgleichungen zu entwickelnden Abel'schen Theorems aufnehmen und finden somit, dass, weil für die Gleichung (66) sich

$$z_1 - z_2 = (c_1 - c_2)\, e^{-\int f(x)\,dx}$$

ergiebt, für den Fall, dass $\int f(x)\,dx$ ein Abel'sches Integral erster Gattung für das Geschlecht p ist, und die den willkürlichen Argumenten $x_1, x_2 \cdots x_\mu$ entsprechenden Werthe von z_1 und z_2 durch

$$z_1^{(1)},\; z_1^{(2)},\; \cdots\; z_1^{(\mu)},\quad z_2^{(1)},\; z_2^{(2)},\; \cdots\; z_2^{(\mu)}$$

bezeichnet werden,

$$\left(z_1^{(1)} - z_2^{(1)}\right)\left(z_1^{(2)} - z_2^{(2)}\right) \cdots \left(z_1^{(\mu)} - z_2^{(\mu)}\right) =$$
$$= \left(c_1 - c_2\right)^{\mu} e^{-\int f(x_1)\,dx_1 - \int f(x_2)\,dx_2 - \cdots - \int f(x_\mu)\,dx_\mu};$$

setzt man nun nach dem Abel'schen Theorem für Quadraturen

$$\int f(x_1)\,dx_1 + \int f(x_2)\,dx_2 + \cdots + \int f(x_\mu)\,dx_\mu = \int f(X_1)\,dX_1 + \cdots + \int f(X_p)\,dX_p,$$

worin die X mit den x in der bekannten algebraischen Beziehung stehen, und bezeichnet die den Argumenten $X_1, \cdots X_p$ entsprechenden Werthe von z_1 und z_2 durch $Z_1^{(1)}, \cdots Z_1^{(p)}$, $Z_2^{(1)}, \cdots Z_2^{(p)}$, so ergiebt sich offenbar *das Abel'sche Theorem einer jeden linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Form*

$$(76) \cdots\cdots \left(z_1^{(1)} - z_2^{(1)}\right)\left(z_1^{(2)} - z_2^{(2)}\right) \cdots \left(z_1^{(\mu)} - z_2^{(\mu)}\right) =$$
$$= \left(c_1 - c_2\right)^{\mu - p}\left(Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)}\right) \cdots \left(Z_1^{(p)} - Z_2^{(p)}\right).$$

Es bedarf keiner weiteren Ausführung, wie das Abel'sche Theorem sich gestaltet, wenn $\int f(x)\,dx$ nicht ein Integral erster Gattung ist, indem nur algebraische Functionen oder Exponentialgrössen hinzutreten.

Kehren wir wieder zu der oben angestellten Untersuchung zurück und nehmen an, die Function F der Gleichung (69) sei eine rationale, so wird die Gleichung (75) — sowie es die Untersuchung der rationalen Beziehungen (33) und (34) ergab — als einzig möglichen Fall den der rationalen linearen Beziehung

$$z = \frac{A_0 z_1 + A_1}{B_0 z_1 + B_1}$$

liefern; da aber auch ebenso

$$z = \frac{a_0 z_2 + a_1}{b_0 z_2 + b_1}$$

sein müsste, und zwischen z_1 und z_2 keine algebraische Beziehung stattfinden darf, so wird z eine in z_1 und z_2 bilinear gebrochene Function sein müssen, und wir finden, *dass für Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rational gebrochene Function zweier nicht algebraischer particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten sein soll, diese Relation eine in z_1 und z_2 bilineare von der Gestalt*

$$\frac{m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m}{n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n}$$

ist, worin $m_0, m_1, m_2, m, n_0, n_1, n_2, n$ im Allgemeinen algebraische Functionen von x sind.

Setzt man nunmehr unter der Voraussetzung, dass die unabhängige Variable x nicht explicite in $F(z_1, z_2, c)$ vorkommen soll, also $m_0, m_1, m_2, m, n_0, n_1, n_2, n$ Constanten bedeuten, den eben gefundenen Werth

$$(77) \quad \cdots \quad z = F(z_1, z_2, c) = \frac{m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m}{n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n}$$

in die Gleichung (71) ein, so folgt wegen

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \Big[(n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n)\left(\frac{\partial m_0}{\partial c} z_1 z_2 + \frac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \frac{\partial m_2}{\partial c} z_2 + \frac{\partial m}{\partial c}\right)$$
$$-(m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m)\left(\frac{\partial n_0}{\partial c} z_1 z_2 + \frac{\partial n_1}{\partial c} z_1 + \frac{\partial n_2}{\partial c} z_2 + \frac{\partial n}{\partial c}\right)\Big] :$$
$$(n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n)^2$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{(n_2 z_2 + n)(m_0 z_2 + m_1) - (m_2 z_2 + m)(n_0 z_2 + n_1)}{(n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n)^2},$$

dass

$$\int \frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} dz_1 = \frac{[(n_2 z_2 + n)(m_0 z_2 + m_1) - (m_2 z_2 + m)(n_0 z_2 + n_1)]}{\left[(n_0 z_2 + n_1)\left(\frac{\partial m_0}{\partial c} z_2 + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right) - (m_0 z_2 + m_1)\left(\frac{\partial n_0}{\partial c} z_2 + \frac{\partial n_1}{\partial c}\right)\right]} \times$$
$$\frac{1}{a-b} \log \left\{\frac{z_1 - a}{z_1 - b}\right\}$$

ist, worin die Grössen a und b als Wurzeln einer quadratischen Gleichung algebraisch aus z_2, den m, n und den Differentialquotienten dieser Grössen nach c genommen zusammengesetzt sind. Bezeichnet man der Kürze halber den gesammten Coefficienten des Logarithmus

auf der rechten Seite der letzten Gleichung durch M, so wird

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\int \frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} dz_1 = M \frac{(z_1 - a)\frac{\partial b}{\partial z_2} - (z_1 - b)\frac{\partial a}{\partial z_2}}{(z_1 - a)(z_1 - b)},$$

wenn wieder berücksichtigt wird, dass wegen des geforderten algebraischen Charakters der Function $f(x, z_1)$ die logarithmische Transcendente herausfallen muss, und es wird somit

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \int \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}}\right) dz_1 = \frac{(z_1 - a)\frac{\partial b}{\partial z_2} - (z_1 - b)\frac{\partial a}{\partial z_2}}{a - b}$$

sein, so dass sich, wenn wieder z_2 gleich einer numerischen Constanten gesetzt wird,

$$f(x, z_1) = \varphi(x)(Az_1^2 + Bz_1 + C) + \psi(x)(Dz_1 + E)$$

ergiebt, also die Differentialgleichung erster Ordnung in

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)(Az^2 + Bz + C) + \psi(x)(Dz + E)$$

übergeht, worin A, B, C, D, E Constanten, und $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ noch beliebige algebraische Functionen von x sind.

Setzen wir nun

$$A\varphi(x) = \Phi(x), \quad B\varphi(x) + D\psi(x) = \Psi(x),$$

worin wieder $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ beliebige algebraische Functionen von x sind, so wird

$$C\varphi(x) + E\psi(x) = a\,\Phi(x) + b\,\Psi(x),$$

wenn a und b willkürliche Constanten bedeuten, und es nimmt somit die Differentialgleichung erster Ordnung die Form an

$$(78) \quad \cdots \quad \frac{dz}{dx} = \Phi(x)\cdot z^2 + \Psi(x)\cdot z + a\,\Phi(x) + b\,\Psi(x),$$

für welche charakteristisch ist, dass das von der abhängigen Variabeln freie Glied eine lineare Zusammensetzung der Coefficienten von z^2 und z ist, und wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine gebrochene rationale Function zweier particulärer Integrale sein kann, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten, nicht von der unabhängigen Variabeln abhängen, ist die durch die Gleichung (78) *dargestellte, und zwar ist die Beziehung dann eine bilineare von der Form* (77).

Stellt man nun für die Gleichung (78) in der Form

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 + a) + \Psi(x)(z + b)$$

die Gleichung (73) auf, so überzeugt man sich leicht, dass die Bedingung der Integrabilität dieser Differentialgleichung nur erfüllt ist wenn $a = -b^2$, d. h. die obige Differentialgleichung von der Form is

$$(79) \cdots \frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 - b^2) + \Psi(x)(z + b),$$

worin $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten Umgekehrt sieht man aber auch sofort, dass, weil die Gleichung (79 durch die Substitution $z = \frac{1}{Z} - b$ in die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} + \big(\Psi(x) - 2b\Phi(x)\big) Z + \Phi(x) = 0$$

übergeht, und diese nach den obigen Ausführungen die folgende Beziehung zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integrale liefert

$$Z = C(Z_1 - Z_2) + Z_1,$$

für die Differentialgleichung (79) die entsprechende Relation existir

$$z = \frac{z_1 z_2 + b(C+1) z_1 - bCz_2}{(C+1) z_2 - Cz_1 + b},$$

und es folgt daher der Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, fü welche das allgemeine Integral eine gebrochene rationale Function zwei particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von einer willkürlich Constanten, nicht von der unabhängigen Variabeln abhängen, ist von d Form

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 - b^2) + \Psi(x)(z + b),$$

worin b eine willkürliche Constante bedeutet, und zwar existirt für diese Differentialgleichungen in der That eine solche Beziehung in Form einer bilinearen Relation.

Was die allgemeinere quadratische Differentialgleichung e Ordnung betrifft,

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x) z^2 + \Omega(x) z + \pi(x),$$

so geht dieselbe bekanntlich, wenn

$$z = -\frac{1}{\omega(x)} \frac{d \log u}{dx}$$

gesetzt wird, in

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0$$

über, worin

$$P = -\left(\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + \Omega(x)\right), \quad Q = \omega(x) \cdot \pi(x)$$

ist, und seien zwei particuläre Integrale

$$z_1 = -\frac{1}{\omega(x)} \frac{\frac{du_1}{dx}}{u_1}, \quad z_2 = -\frac{1}{\omega(x)} \frac{\frac{du_2}{dx}}{u_2},$$

während das allgemeine Integral durch

$$z = -\frac{1}{\omega(x)} \frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{u_1 + cu_2}$$

dargestellt ist, so folgt

$$(80) \cdots\cdots z = \frac{u_1 z_1 + cu_2 z_2}{u_1 + cu_2};$$

bezeichnet man ferner ein dem Werthe der Constanten c_3 entsprechendes particuläres Integral durch z_3, so dass

$$(81) \cdots\cdots z_3 = \frac{u_1 z_1 + c_3 u_2 z_2}{u_1 + c_3 u_2}$$

wird, so folgt aus (80) und (81) durch Elimination von u_1 und u_2

$$(82) \cdots\cdots z = \frac{c_3 z_1 (z_2 - z_3) + cz_2 (z_3 - z_1)}{c_3 (z_2 - z_3) + c(z_3 - z_1)},$$

und *es ist somit für jede Differentialgleichung erster Ordnung von der Form*

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x) z^2 + \Omega(x) z + \pi(x),$$

worin $\omega(x)$, $\Omega(x)$, $\pi(x)$ beliebige Functionen von x bedeuten, das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function zweiten Grades von drei particulären Integralen mit constanten Coefficienten, die in Bezug auf jedes der drei particulären Integrale linear ist.

Zu den durch die Gleichung (79) charakterisirten Differentialgleichungen mag noch bemerkt werden, dass vermöge der Substitution

$$Z = \frac{1}{z + b}$$

und nach dem durch die Gleichung (76) dargestellten Abel'schen Theorem für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, wenn z_1 und z_2 zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung (79) bezeichnen,

$$x_1, x_2, \cdots x_\mu, z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \cdots z_1^{(\mu)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \cdots z_2^{(\mu)},$$

μ willkürliche Werthe der unabhängigen Variabeln und die dazu gehörigen Werthe jener beiden particulären Integrale bedeuten, endlich

$$X_1, X_2, \cdots X_p, \zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \cdots \zeta_1^{(p)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \cdots \zeta_2^{(p)}$$

die nach dem Abel'schen Additionstheorem definirten unabhängigen Variabeln und die zugehörigen Werthe der beiden particulären Integrale vorstellen, *das erweiterte Abel'sche Theorem für die Differen-*

tialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 - b^2) + \Psi(x)(z + b)$$

die Form annimmt

$$\left(\frac{1}{z_1^{(1)}+b} - \frac{1}{z_2^{(1)}+b}\right)\left(\frac{1}{z_1^{(2)}+b} - \frac{1}{z_2^{(2)}+b}\right)\cdots\left(\frac{1}{z_1^{(\mu)}+b} - \frac{1}{z_2^{(\mu)}+b}\right)$$

$$= C\left(\frac{1}{\zeta_1^{(1)}+b} - \frac{1}{\zeta_2^{(1)}+b}\right)\cdots\left(\frac{1}{\zeta_1^{(p)}+b} - \frac{1}{\zeta_2^{(p)}+b}\right),$$

worin C eine Constante bedeutet.

Nachdem wir oben gefunden, dass nur solche in der Form (72) enthaltene Differentialgleichungen, welche durch eine lineare Substitution aus den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ableitbar sind, die Eigenschaft besitzen, dass das allgemeine Integral eine rationale Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constante ist, liegt es nahe, die Bedingung der Integrabilität der Differentialgleichung (73) überhaupt zu untersuchen, um die Möglichkeit von Beziehungen der Form (69) festzustellen. Die Integrabilitätsbedingung lautet, wenn wir der bequemeren Schreibweise wegen die Variabeln z, z_1, z_2 durch x, y, z und die Functionen φ_1 und ψ_1 durch φ und ψ ersetzen:

$$\begin{aligned}
&\left[\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi(x)\right]\left[\varphi'(y)\psi(z)-\varphi(z)\psi'(y)-\varphi(z)\psi'(x)+\varphi'(x)\psi(z)\right]\\
+&\left[\varphi(y)\psi(z)-\varphi(z)\psi(y)\right]\left[\varphi'(z)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(z)-\varphi(x)\psi'(y)+\varphi'(y)\psi(x)\right]\\
+&\left[\varphi(z)\psi(x)-\varphi(x)\psi(z)\right]\left[\varphi'(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi'(x)-\varphi(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi(y)\right] =
\end{aligned}$$

oder, wie leicht zu sehen,

$$\begin{aligned}
&\left[\varphi(x)\psi(z)-\varphi(z)\psi(x)\right]\left[\varphi'(y)\psi(y)-\psi'(y)\varphi(y)\right]\\
+&\left[\varphi(y)\psi(x)-\varphi(x)\psi(y)\right]\left[\varphi'(z)\psi(z)-\psi'(z)\varphi(z)\right]\\
+&\left[\varphi(z)\psi(y)-\varphi(y)\psi(z)\right]\left[\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

oder endlich, indem wir diese Gleichung als Differentialgleichung in $\varphi(y)$ als Function von y auffassen, wobei x und z als Parameter zu betrachten sind,

$$\varphi'(y) - \varphi(y)\left[\frac{\psi'(y)}{\psi(y)} + \frac{P}{\psi(y)}\right] = Q,$$

worin

$$P = \frac{\psi(x)\left[\varphi'(z)\psi(z) - \psi'(z)\varphi(z)\right] - \psi(z)\left[\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)\right]}{\varphi(x)\psi(z) - \psi(x)\varphi(z)}$$

$$Q = \frac{\varphi(x)\left[\varphi'(z)\psi(z) - \psi'(z)\varphi(z)\right] - \varphi(z)\left[\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)\right]}{\varphi(x)\psi(z) - \psi(x)\varphi(z)}.$$

Die Integration der obigen Differentialgleichung liefert

$$\varphi(y) = R\psi(y)\, e^{P\int\frac{dy}{\psi(y)}} + Q\psi(y)\, e^{P\int\frac{dy}{\psi(y)}} \int e^{-P\int\frac{dy}{\psi(y)}} \frac{dy}{\psi(y)},$$

worin R eine willkürliche Function von x und z ist, oder

$$\varphi(y) = R\psi(y)\, e^{P\int\frac{dy}{\psi(y)}} - \frac{Q}{P}\psi(y).$$

Nun sollen aber $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ algebraische Functionen von y sein, es kann also entweder $R = 0$, also $\varphi(y) = T \cdot \psi(y)$ sein, oder es ist $e^{\int\frac{dy}{\psi(y)}}$ eine algebraische Function von y, d. h. es ist $\psi(y) = \frac{1}{\frac{d\log\chi(y)}{dy}}$, wenn $\chi(y)$ eine algebraische Function bedeutet, und daher

$$\varphi(y) = R\frac{\chi(y)^P}{\frac{d\log\chi(y)}{dy}} - \frac{Q}{P}\frac{1}{\frac{d\log\chi(y)}{dy}};$$

im ersten Falle geht die Differentialgleichung (72) in

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\, T\psi_1(z) + \psi(x)\,\psi_1(z),$$

d. h. in

$$(A) \cdots\cdot \frac{dz}{\psi_1(z)} = U(x)\, dx$$

über, worin U eine algebraische Function von x darstellt, im zweiten Falle nimmt jene Differentialgleichung die Form an

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\left[\frac{R\chi(z)^{P+1}}{\frac{d\chi(z)}{dz}} - \frac{Q}{P}\frac{\chi(z)}{\frac{d\chi(z)}{dz}}\right] + \frac{\psi(x)\,\chi(z)}{\frac{d\chi(z)}{dz}},$$

in welcher P wegen des algebraischen Charakters der vorher mit $\varphi(y)$ bezeichneten Function eine rationale constante Zahl sein muss, oder

$$(B) \cdots\cdot \frac{d\chi(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \Phi(x)\,\chi(z)^{P+1} + \Psi(x)\,\chi(z),$$

wenn $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ wieder algebraische Functionen von x bedeuten. Was nun die Gleichung (A) angeht, so liefert diese den schon früher behandelten Fall der Quadraturen, andererseits ist aus (B) unmittelbar zu erkennen, dass die Substitution $\chi(z) = Z$ dieselbe in

$$\frac{dZ}{dx} = \Phi(x)\, Z^{P+1} + \Psi(x)\, Z,$$

oder wenn $Z^{-P} = \zeta$ gesetzt wird, in

$$\frac{d\zeta}{dx} + P\Psi(x)\,\zeta = -P\Phi(x)$$

überführt, und da für die letztere, wenn ζ_1 und ζ_2 zwei particuläre

Integrale bedeuten, wie oben gezeigt worden,

$$\zeta = C(\zeta_1 - \zeta_2) + \zeta_1$$

ist, so wird dem entsprechend

$$Z^{-p} = C\left(Z_1^{-p} - Z_2^{-p}\right) + Z_1^{-p}$$

sein, und daher, da $\chi(z) = Z$ die algebraische Beziehung zwischen z und Z darstellte, die zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen der Gleichung (B) bestehende algebraische Beziehung

$$\chi(z)^{-p} = C\left[\chi(z_1)^{-p} - \chi(z_2)^{-p}\right] + \chi(z_1)^{-p}$$

sein; jedenfalls ist diese zweite Gattung von Differentialgleichungen aus der linearen erster Ordnung durch eine algebraische Substitution für die abhängige Variable, welche die unabhängige Variable nicht enthält, abgeleitet, und umgekehrt versteht es sich von selbst, dass zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen einer durch eine algebraische Substitution aus der linearen Differentialgleichung erster Ordnung abgeleiteten Differentialgleichung ein algebraischer Zusammenhang stattfinden wird, so dass wir den nachstehenden Satz erhalten:

Die einzige Klasse derjenigen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, ist die der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und der durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten.

Bevor wir nun zur Aufstellung der allgemeinen Form des erweiterten Abel'schen Theorems für beliebige homogene lineare Differentialgleichungen übergehen, mögen noch einige Bemerkungen über die Eigenschaft solcher Relationen vorausgeschickt werden.

Es ist bekannt, dass, während die elliptische Function sinam u ein Additionstheorem besitzt, vermöge dessen sich sinam $(u + v)$ algebraisch durch sinam u und sinam v ausdrücken lässt, der Fundamentaltranscendenten der elliptischen Functionen, der ϑ-Function, kein solches Additionstheorem zukommt, und man kann die Unmöglichkeit des Bestehens eines solchen unmittelbar einsehen, da, wenn z. B.

$$\vartheta_1(u + v) = F\{\vartheta_1(u), \vartheta_1(v)\}$$

wäre, worin F eine algebraische Function bedeutet, die rechte Seite für alle Werthe von v, welche $\vartheta_1(v) = 0$ machen, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen könnte, während diese Werthe $v = m + n\tau$, worin τ den ϑ-Modul bedeutet, der linken Seite die unendlich vielen verschiedenen Werthe

$$\vartheta_1(u + m + n\tau) = (-1)^{m+n} e^{-n(2u+n\tau)\pi i}\, \vartheta_1(u)$$

geben würden.

Ebenso ist leicht einzusehen, wesshalb für Abel'sche Integrale erster Gattung, deren Geschlecht $p > 1$, sich nicht die Summe beliebig vieler mit willkürlichen Grenzen stets zu *einem* solchen Integrale vereinigen lässt, da, wenn

$$\int^{z_1} y\,dz + \int^{z_2} y\,dz + \int^{z_3} y\,dz + \cdots = \int^{Z} y\,dz$$

wäre, für fest angenommene Integrationswege auf der linken Seite der Gleichung diese ganze linke Seite einen fest bestimmten Werth haben würde, der jedoch für Z noch nichts bestimmen würde, da Z bekanntlich keine Function des Integralwerthes von endlicher Vieldeutigkeit ist. Vielmehr lässt sich eine beliebige Anzahl solcher Integrale stets zu p gleichartigen zusammenfassen, deren obere Grenzen Lösungen einer algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten rational aus den Grenzen der gegebenen Integrale und der zu ihnen gehörigen algebraischen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, und dieselbe Beziehung findet dann für jedes zu dieser algebraischen Irrationalität gehörige Integral erster Gattung statt. Ferner weiss man aber auch, dass, um als Beispiel die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung herauszugreifen, für die eindeutigen Umkehrungsfunctionen des Systems

$$\int^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = u_1$$

$$\int^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \int^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} = u_2$$

Additionstheoreme von der Form bestehen:

$$al_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = F_1\{al_1(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(u_1, u_2), al_2(v_1, v_2)\}$$
$$al_2(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = F_2\{al_1(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(u_1, u_2), al_2(v_1, v_2)\},$$

worin F_1 und F_2 algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und man kann unmittelbar einsehen, dass $al_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ sich nicht etwa nur durch *eine* Function für die beiden Argumentenpaare algebraisch wird ausdrücken lassen; denn wäre

$$al_1(u_1 + v_1,\ u_2 + v_2) = f\{al_1(u_1,\ u_2),\ al_1(v_1,\ v_2)\},$$

so würde man, ähnlich wie es oben für die ϑ-Function geschehen, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe für die rechte Seite der Gleichung erhalten, wenn man $al_1(v_1,\ v_2) = a$ setzt, worin a eine fest gewählte Constante bedeutet, während die linke Seite wieder unendlich viele Werthe annimmt; es müssen somit in das Abel'sche Theorem zwei selbständige Functionen eintreten, wie wir es schon

n für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung gefunden ...en.

Sehen wir nun von der Form des Abel'schen Theorems als ...nem Additionstheoreme ab und betrachten für zwei Functionen ...weier Variabeln $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$ das Abel'sche Theorem in der ...estalt

$$(a) \cdots f_1 \{\varphi_1(u_1, v_1), \psi_1(u_2, v_2)\} = F_1[f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_1(v_1, v_2), f_2(v_1, v_2)]$$

$$(b) \cdots f_2 \{\varphi_2(u_1, v_1), \psi_2(u_2, v_2)\} = F_2[f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_1(v_1, v_2), f_2(v_1, v_2)],$$

worin φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 algebraische Functionen bedeuten sollen, so folgt aus der ersten dieser beiden Gleichungen (a), wenn dieselbe nach u_1 und v_1 differentiirt und aus diesen so entstehenden Gleichungen $\frac{\partial f_1(\varphi_1, \psi_1)}{\partial \varphi_1}$ eliminirt wird, wobei v_1 und v_2 nunmehr als constante Parameter betrachtet werden sollen, eine Gleichung von der Form

$$(A) \cdots \Phi_1 \left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0,$$

und ebenso, wenn jene erste Gleichung nach u_2 und v_2 differentiirt wird,

$$(B) \cdots \Psi_1 \left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_2}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0;$$

genau so aus der Gleichung (b)

$$(C) \cdots \Phi_2 \left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0$$

$$(D) \cdots \Psi_2 \left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_2}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0.$$

Fasst man nun in den Gleichungen (A) und (C) die Grösse u_2 als Parameter auf, so wird man, nachdem jede derselben nach u_1 differentiirt ist, aus den so erhaltenen 4 Gleichungen die Grössen $f_2(u_1, u_2)$, $\frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}$ eliminiren können und erhält somit *für die den Gleichungen des Abel'schen Theorems* (a) *und* (b) *unterworfene Function* $f_1(u_1, u_2)$ *das Resultat, dass dieselbe als Function von* u_1 *aufgefasst, einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen muss.* So folgen aus dem oben hingeschriebenen System hype... elliptischer Integrale unmittelbar die Beziehungen

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1} \frac{1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{\partial z_2}{\partial u_1} \frac{1}{\sqrt{R(z_2)}} = 1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \frac{z_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{\partial z_2}{\partial u_1} \frac{z_2}{\sqrt{R(z_2)}} =$$

oder

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = \frac{z_2 \sqrt{R(z_1)}}{z_2 - z_1}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u_1} = \frac{z_1 \sqrt{R(z_2)}}{z_1 - z_2},$$

und hieraus durch Differentiation der ersten Gleichung nach u_1 und Elimination von z_2 und $\frac{\partial z_2}{du_1}$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung für z_1 als Function von u_1 aufgefasst. Dass diese letztere die Variable u_1 nicht explicite enthält, sieht man unmittelbar aus der Form der Gleichungen, und es ist klar, dass dies stets der Fall sein wird, wenn in den Gleichungen (a) und (b) die Functionen $\varphi_1(u_1, v_1)$, $\varphi_2(u_1, v_1)$, $\psi_1(u_2, v_2)$, $\psi_2(u_2, v_2)$ lineare Functionen ihrer Variabeln sind, also das Abel'sche Theorem ein Additionstheorem ist, da nur die Differentialquotienten der φ- und ψ-Functionen, welche in diesem Falle Constanten sind, in die differentiirten Gleichungen (a) und (b) eintreten, wie es in der That oben bei den hyperelliptischen Functionen der Fall war. Schon aus diesem letzteren Umstande könnte man, wenn man die Umkehrungsfunctionen der particulären Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu Hülfe nehmen wollte, schliessen, *dass ein Abel'sches Theorem, welches zu $p = 2$ gehört, nie die lineare Form*

$$(\mathrm{m}) \cdots\cdot A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots = 0$$

haben kann, wenn $z_1, z_2, z_3, \cdots$ die Werthe ein und desselben particulären Integrales einer homogenen irreductibeln linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Coefficienten für die unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, x_3, \cdots, Z_1$ und Z_2 die Werthe desselben particulären Integrales für die Variabeln X_1 und X_2 bedeuten, welche algebraisch von $x_1, x_2, x_3, \cdots$ abhängen und endlich $a_0, a_1, a_2, \cdots A_1, A_2$ algebraische Functionen der Variabeln vorstellen, ein Abel'sches Theorem, wie es z. B. für Abel'sche Integrale erster Gattung, welche zum Geschlecht $p = 2$ gehören, in der That durch die Form

$$Z_1 + Z_2 - z_1 - z_2 - z_3 - \cdots = 0$$

gegeben ist. Man kann diesen Satz aber auch direct beweisen, doch wollen wir, da das Resultat nur ein negatives ist, den Gang des Beweises nur kurz skizziren: substituirt man nämlich in Gleichung (m) statt z_1 $\mu_1 z_1$, wo μ_1 eine willkürliche Constante bedeutet, so wird man nach dem Satze I des § 5 Z_1 durch $m_1 Z_1 + m_1' Z_1'$ und Z_2 durch $n_1 Z_2 + n_1' Z_2'$ zu ersetzen haben, wenn Z_1 und Z_1', Z_2 und Z_2' die Werthe der beiden particulären Fundamentalintegrale der gegebenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die resp. Argumente X_1 und X_2 sind, und ähnlich, wenn z_2 durch $\mu_2 z_2$, und z_3 durch $\mu_3 z_3$ ersetzt werden, so dass man aus (m) die vier Beziehungen herleitet:

$$Z_1' + 1 \cdot A_2 Z_2 + 0 \cdot A_2 Z_2' + (A_1 Z_1 + a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots) = 0$$
$$Z_1' + n_1 A_2 Z_2 + n_1' A_2 Z_2' + (m_1 A_1 Z_1 + a_0 + \mu_1 a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots) = 0$$
$$Z_1' + n_2 A_2 Z_2 + n_2' A_2 Z_2' + (m_2 A_1 Z_1 + a_0 + a_1 z_1 + \mu_2 a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots) = 0$$
$$Z_1' + n_3 A_2 Z_2 + n_3' A_2 Z_2' + (m_3 A_1 Z_1 + a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \mu_3 a_3 z_3 + \cdots) = 0.$$

Betrachtet man dieselben als ein System linearer Gleichungen in den Grössen $A_1 Z_1'$, $A_2 Z_2$, $A_2 Z_2'$ und 1, so muss die Determinante verschwinden, und da diese wiederum eine lineare Function in $Z_1, z_1, z_2, z_3, \cdots$ sein würde, andererseits aber, wie vorher gezeigt worden, ein Abel'sches Theorem mit der festen Zahl $p = 1$ nicht existirt, so müssen die Coefficienten der einzelnen Grössen verschwinden, und somit,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & m_1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & m_2 \\ m_3' & n_3 & n_3' & m_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & \mu_1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & 1 \\ m_3' & n_3 & n_3' & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & 1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & \mu_2 \\ m_3' & n_3 & n_3' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & 1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & 1 \\ m_3' & n_3 & n_3' & \mu_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & 1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & 1 \\ m_3' & n_3 & n_3' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sein, woraus wiederum leicht vermöge der Willkürlichkeit von μ_1, μ_2, μ_3

$$\begin{vmatrix} m_1' & n_1 & n_1' \\ m_2' & n_2 & n_2' \\ m_3' & n_3 & n_3' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} m_2' n_3' - m_3' n_2' &= 0 \\ m_1' n_3' - m_3' n_1' &= 0 \\ m_1' n_2' - m_2' n_1' &= 0 \end{aligned}$$

geschlossen wird. Bemerkt man nun, dass aus diesen Bedingungen folgt, dass $\frac{m_1'}{n_1'} = \frac{m_2'}{n_2'} = \frac{m_3'}{n_3'}$ von den Grössen μ_1, μ_2, μ_3 unabhängige numerische Constanten sind, und geht wieder zu den vier oben aufgestellten linearen Beziehungen zurück, so sieht man, wenn z. B. aus der zweiten und dritten Z_1 eliminirt und das Resultat mit einer der anderen beiden Gleichungen zusammengestellt wird, dass jene Gleichungen nicht mit der Annahme der Willkürlichkeit der Grössen μ_1, μ_2, μ_3 vereinbar sind.

Nachdem wir oben gesehen, dass schon bei den Differentialgleichungen erster Ordnung zwei particuläre Integrale in das Abel'sche Theorem eintraten, wollen wir nun zum Schlusse dieser Untersuchungen die Frage erörtern, welches die Form des Abel'schen Theorems für alle homogenen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung sein muss oder welches die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen particulären Integralen derselben für algebraisch von einander abhängige Werthe der unabhängigen Variabeln ist.

Sei die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(83) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + y_{m-1} \frac{dz}{dx} + y_m z = 0$$

vorgelegt, in welcher $y_1, y_2, \cdots y_m$ irreductible algebraische Functionen

bedeuten sollen, seien ferner $z_1, z_2, \cdots z_m$ m particuläre Fundamentalintegrale derselben, und mögen die Werthe von z_ϱ für die Argumente $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa, X_1, X_2, \cdots X_p$ mit $z_{\varrho 1}, z_{\varrho 2}, \cdots z_{\varrho \varkappa}, Z_{\varrho 1}, Z_{\varrho 2}, \cdots Z_{\varrho p}$ bezeichnet werden, wobei $X_1, X_2, \cdots X_p$ algebraisch von $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa$ abhängen, so soll die Form einer algebraischen Beziehung, die zwischen den particulären Integralen für die angegebenen Argumente stattfindet,

$$(84) \cdots F(z_{11}, z_{21}, \cdots z_{m1}, Z_{11}, Z_{12}, \cdots Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdots Z_{2p}, \\ Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots Z_{mp}) = 0,$$

in deren Bezeichnung wir die Werthe der Integrale für die unabhängigen Variabeln $x_2, x_3, \cdots x_\varkappa$ nicht aufgenommen haben, näher untersucht werden. Machen wir nun die Annahme, dass das Integral z_1 nicht schon einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} Genüge leistet, so folgt aus dem Satze I des § 5 von der Erhaltung der algebraischen Beziehung, dass, wenn statt z_{11} resp. $z_{21}, z_{31}, \cdots z_{m1}$ gesetzt werden, die Gleichung (84) bestehen bleibt, wenn man nur statt $Z_{\alpha\varrho}$ und $z_{\alpha 1}$ $a_{1\varrho} Z_{1\varrho} + a_{2\varrho} Z_{2\varrho} + \cdots + a_{m\varrho} Z_{m\varrho}$ und $b_{11} z_{11} + b_{21} z_{21} + \cdots + b_{m1} z_{m1}$ substituirt, so dass sich m Gleichungen ergeben, aus denen sich $z_{11}, z_{21}, \cdots z_{m1}$ in der Form darstellen lassen

$$(85) \begin{cases} z_{11} = \varphi_1(Z_{11}, Z_{12}, \cdots Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdots Z_{2p}, \cdots Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots Z_{mp}) \\ z_{21} = \varphi_2(Z_{11}, Z_{12}, \cdots Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdots Z_{2p}, \cdots Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots Z_{mp}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{m1} = \varphi_m(Z_{11}, Z_{12}, \cdots Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdots Z_{2p}, \cdots Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots Z_{mp}). \end{cases}$$

Setzt man in einer dieser Gleichungen

$$(86) \cdots z_{\varrho 1} = \varphi_\varrho(Z_{11}, Z_{12}, \cdots Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdots Z_{2p}, \cdots Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots Z_{mp})$$

$\mu_\varrho z_{\varrho 1}$ statt $z_{\varrho 1}$, so wird man wieder statt $Z_{\alpha\beta}$

$$m_{1\beta}^{(\alpha)} Z_{1\beta} + m_{2\beta}^{(\alpha)} Z_{2\beta} + \cdots + m_{m\beta}^{(\alpha)} Z_{m\beta}$$

zu substituiren haben, und erhält somit

$$(87) \; \mu_\varrho z_{\varrho 1} = \varphi_\varrho\left(m_{11}^{(1)} Z_{11} + \cdots + m_{m1}^{(1)} Z_{m1}, \cdots m_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots + m_{mp}^{(m)} Z_{mp}\right),$$

und daher aus (86) und (87) die Beziehung

$$(88) \; \varphi_\varrho\left(m_{11}^{(1)} Z_{11} + \cdots + m_{m1}^{(1)} Z_{m1}, \cdots m_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots + m_{mp}^{(m)} Z_{mp}\right) \\ = \mu_\varrho \varphi_\varrho(Z_{11}, \cdots Z_{1p}, \cdots Z_{m1}, \cdots Z_{mp}),$$

in welcher μ_ϱ eine willkürliche Constante und die Grössen $m_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ von dieser abhängige Constanten bedeuten.

Nimmt man nun an, dass die der Untersuchung zu Grunde gelegte Gleichung (84) eine algebraische Beziehung zwischen den particulären Integralen der linearen Differentialgleichung *für die kleinste*

Anzahl $p+1$ *algebraisch von einander abhängiger Argumente* liefern soll, oder dass nicht schon zwischen den particulären Integralen für die Argumente $X_1, X_2, \cdots X_p$ eine algebraische Beziehung bestehen soll, so wird die Gleichung (88) eine identische sein müssen und daher für willkürliche Werthe der $Z_{\alpha\beta}$ und beliebige Werthe von μ_ϱ gültig sein. Bezeichnet man nun der Kürze halber die Argumente der auf der linken Seite der Gleichung (88) befindlichen φ-Function mit

$$I_1,\ II_1, \cdots M_1,\ I_2,\ II_2, \cdots M_2, \cdots I_p,\ II_p, \cdots M_p$$

und die zugehörige φ-Function durch Φ_ϱ, so folgt durch Differentiation der Gleichung (88) nach $Z_{11}, \cdots Z_{m1}, \cdots Z_{1p}, \cdots Z_{mp}$

$$(89)\cdots\left\{\begin{array}{l} m_{1\sigma}^{(1)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial I_\sigma}+m_{1\sigma}^{(2)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial II_\sigma}+\cdots+m_{1\sigma}^{(m)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial M_\sigma}=\mu_\varrho\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial Z_{1\sigma}}\\ m_{2\sigma}^{(1)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial I_\sigma}+m_{2\sigma}^{(2)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial II_\sigma}+\cdots+m_{2\sigma}^{(m)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial M_\sigma}=\mu_\varrho\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial Z_{2\sigma}}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ m_{m\sigma}^{(1)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial I_\sigma}+m_{m\sigma}^{(2)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial II_\sigma}+\cdots+m_{m\sigma}^{(m)}\dfrac{\partial\Phi_\varrho}{\partial M_\sigma}=\mu_\varrho\dfrac{\partial\varphi_\varrho}{\partial Z_{m\sigma}}, \end{array}\right.$$

und wenn man (88) nach μ_ϱ differentiirt

$$(90)\cdots\sum_1^p{}_\sigma\left\{\frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial I_\sigma}\left(Z_{1\sigma}\frac{dm_{1\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho}+Z_{2\sigma}\frac{dm_{2\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho}+\cdots+Z_{m\sigma}\frac{dm_{m\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho}\right)\right.$$
$$+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\left.+\frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial M_\sigma}\left(Z_{1\sigma}\frac{dm_{1\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho}+Z_{2\sigma}\frac{dm_{2\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho}+\cdots+Z_{m\sigma}\frac{dm_{m\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho}\right)\right\}=\varphi_\varrho.$$

Die aus dem Gleichungssystem (89) sich ergebenden Werthe für $\frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial I_\sigma}, \frac{\partial\Phi_\varrho}{\partial II_\sigma}, \cdots$ liefern in (90) eingesetzt die Beziehung

$$(91)\cdots\sum_1^p{}_\sigma\left\{\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial Z_{1\sigma}}\left(a_{1\sigma}^{(1)}Z_{1\sigma}+a_{2\sigma}^{(1)}Z_{2\sigma}+\cdots+a_{m\sigma}^{(1)}Z_{m\sigma}\right)\right.$$
$$+\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial Z_{2\sigma}}\left(a_{1\sigma}^{(2)}Z_{1\sigma}+a_{2\sigma}^{(2)}Z_{2\sigma}+\cdots+a_{m\sigma}^{(2)}Z_{m\sigma}\right)$$
$$+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial Z_{m\sigma}}\left(a_{1\sigma}^{(m)}Z_{1\sigma}+a_{2\sigma}^{(m)}Z_{2\sigma}+\cdots+a_{m\sigma}^{(m)}Z_{m\sigma}\right)\right\}=\varphi_\varrho,$$

worin die a von μ_ϱ abhängige Constanten bedeuten, somit eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von φ_ϱ.

Bekanntlich reducirt sich die Integration dieser partiellen Differentialgleichung auf die Integration des Systems totaler Differentialgleichungen

$$(92) \cdots \frac{d\varphi_\varrho}{\varphi_\varrho} = \frac{dZ_{11}}{a_{11}^{(1)} Z_{11} + \cdots + a_{m1}^{(1)} Z_{m1}} = \cdots = \frac{dZ_{m1}}{a_{11}^{(m)} Z_{11} + \cdots + a_{m1}^{(m)} Z_{m1}}$$
$$= \frac{dZ_{12}}{a_{12}^{(1)} Z_{12} + \cdots + a_{m2}^{(1)} Z_{m2}} = \cdots = \frac{dZ_{m2}}{a_{12}^{(m)} Z_{12} + \cdots + a_{m2}^{(m)} Z_{m2}}$$
$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{dZ_{1p}}{a_{1p}^{(1)} Z_{1p} + \cdots + a_{mp}^{(1)} Z_{mp}} = \cdots = \frac{dZ_{mp}}{a_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots + a_{mp}^{(m)} Z_{mp}},$$

oder mit Hülfe einer Variabeln u auf das System

$$(93) \cdots \begin{cases} \frac{dZ_{1\sigma}}{du} = a_{1\sigma}^{(1)} Z_{1\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(1)} Z_{m\sigma} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dZ_{m\sigma}}{du} = a_{1\sigma}^{(m)} Z_{1\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(m)} Z_{m\sigma} \\ \qquad \frac{d\varphi_\varrho}{du} = \varphi_\varrho. \end{cases} \qquad \sigma = 1, 2, \cdots p$$

Bezeichnet man die Lösungen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1\sigma}^{(1)} - \nu_\sigma & a_{2\sigma}^{(1)} & \cdots & a_{m\sigma}^{(1)} \\ a_{1\sigma}^{(2)} & a_{2\sigma}^{(2)} - \nu_\sigma & \cdots & a_{m\sigma}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\sigma}^{(m)} & a_{2\sigma}^{(m)} & \cdots & a_{m\sigma}^{(m)} - \nu_\sigma \end{vmatrix} = 0$$

mit $\nu_\sigma^{(1)}, \nu_\sigma^{(2)}, \cdots \nu_\sigma^{(m)}$, und bestimmt eine Reihe von Grössen A als Lösungen des Systems linearer Gleichungen

$$\left(a_{1\sigma}^{(1)} - \nu_\sigma^{(\varrho)}\right) A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(1)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(1)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} = 0$$
$$a_{1\sigma}^{(2)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + \left(a_{2\sigma}^{(2)} - \nu_\sigma^{(\varrho)}\right) A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(2)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1\sigma}^{(m)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(m)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + \left(a_{m\sigma}^{(m)} - \nu_\sigma^{(\varrho)}\right) A_{m\sigma}^{(\varrho)} = 0,$$

so ergeben sich bekanntlich für das System der Differentialgleichungen (93) die Integrale

$$Z_{1\sigma} = c_{1\sigma} A_{1\sigma}^{(1)} e^{\nu_\sigma^{(1)} u} + c_{2\sigma} A_{1\sigma}^{(2)} e^{\nu_\sigma^{(2)} u} + \cdots + c_{m\sigma} A_{1\sigma}^{(m)} e^{\nu_\sigma^{(m)} u}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_{m\sigma} = c_{1\sigma} A_{m\sigma}^{(1)} e^{\nu_\sigma^{(1)} u} + c_{2\sigma} A_{m\sigma}^{(2)} e^{\nu_\sigma^{(2)} u} + \cdots + c_{m\sigma} A_{m\sigma}^{(m)} e^{\nu_\sigma^{(m)} u}$$
$$\varphi_\varrho = c e^u,$$

oder

$$Z_{1\sigma} = c_{1\sigma} A_{1\sigma}^{(1)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(1)}} + c_{2\sigma} A_{1\sigma}^{(2)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(2)}} + \cdots + c_{m\sigma} A_{1\sigma}^{(m)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(m)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_{m\sigma} = c_{1\sigma} A_{m\sigma}^{(1)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(1)}} + c_{2\sigma} A_{m\sigma}^{(2)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(2)}} + \cdots + c_{m\sigma} A_{m\sigma}^{(m)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(m)}}.$$

Da nun diese Gleichungen, nach den $c_{1\sigma}$ aufgelöst, Ausdrücke von der Form liefern

$$c_{\tau\sigma} = \varphi_\varrho^{-\nu_\sigma^{(\tau)}} \left\{ B_{1\sigma}^{(\tau)} Z_{1\sigma} + B_{2\sigma}^{(\tau)} Z_{2\sigma} + \cdots + B_{m\sigma}^{(\tau)} Z_{m\sigma} \right\},$$

worin die B wiederum Constanten bedeuten, so wird das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (91), wenn φ_ϱ der Gleichung (86) gemäss durch $z_{\varrho 1}$ ersetzt wird, durch die Beziehung gegeben sein

$$(94) \cdots\cdot F\Big\{ z_{\varrho 1}^{-\nu_1^{(1)}} \left(B_{11}^{(1)} Z_{11} + B_{21}^{(1)} Z_{21} + \cdots + B_{m1}^{(1)} Z_{m1}\right),$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_1^{(2)}} \left(B_{11}^{(2)} Z_{11} + B_{21}^{(2)} Z_{21} + \cdots + B_{m1}^{(2)} Z_{m1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_1^{(m)}} \left(B_{11}^{(m)} Z_{11} + \cdots\cdots\cdots + B_{m1}^{(m)} Z_{m1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_p^{(1)}} \left(B_{1p}^{(1)} Z_{1p} + \cdots\cdots\cdots + B_{mp}^{(1)} Z_{mp}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_p^{(m)}} \left(B_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots\cdots\cdots + B_{mp}^{(m)} Z_{mp}\right)\Big\} = 0,$$

worin F eine willkürliche Function bezeichnet, und die Grössen B von den anderen unabhängigen Variabeln $x_2, \cdots x_\varkappa$ und den zugehörigen Integralen algebraisch abhängen. *Dies wird somit die allgemeinste Form der Gleichung* (86) *sein, welche den Gleichungen* (85) *gemäss ein Element des erweiterten Abel'schen Theorems für eine algebraische Beziehung zwischen den particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit algebraisch unter einander verbundenen Argumenten bildet.*

Gehen wir nun ein wenig näher auf die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein; es war im § 3 gezeigt worden, dass, wenn solche Differentialgleichungen reductibel sind, entweder zwischen zwei Fundamentalintegralen eine algebraische Beziehung stattfindet — worin der Fall, dass die Integrale selbst algebraisch sind, eingeschlossen ist — oder dass dieselben eine lineare Differen-

tialgleichung erster Ordnung als Integral besitzen, und zwar dann auch stets ein Integral von der Form

$$e^{\int \varphi(x)\,dx},$$

worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function bedeutet; ist nun dieses letztere der Fall, so erkennt man sofort die Form des Abel'schen Theorems für zwei transcendente particuläre Fundamentalintegrale z_1 und z_2 der reductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung. Denn, da für zwei bestimmte constante Werthe a und b

$$az_1 + bz_2 = e^{\int \varphi(x)\,dx}$$

ist, so folgt vermöge des Abel'schen Theorems der rechten Seite dieser Gleichung, wenn z. B. vorausgesetzt wird, dass $\int \varphi(x)\,dx$ ein Integral erster Gattung vom Geschlechte p ist, in bekannten Bezeichnungen

$$\left(az_1^{(1)} + bz_2^{(1)}\right)\left(az_1^{(2)} + bz_2^{(2)}\right)\cdots\left(az_1^{(\mu)} + bz_2^{(\mu)}\right)$$
$$= \left(aZ_1^{(1)} + bZ_2^{(1)}\right)\cdots\left(aZ_1^{(p)} + bZ_2^{(p)}\right);$$

so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} - (1+P)z = 0,$$

in welcher P eine beliebige algebraische Function bedeutet, die beiden Fundamentalintegrale

$$z_1 = e^x\int e^{-\int (P+2)\,dx}\,dx \quad \text{und} \quad z_2 = -e^x\int e^{-\int (P+2)\,dx}\,dx + e^x,$$

und das für diese geltende Abel'sche Theorem lautet

$$\left(z_1^{(1)} + z_2^{(1)}\right)\left(z_1^{(2)} + z_2^{(2)}\right)\cdots\left(z_1^{(\mu)} + z_2^{(\mu)}\right) = Z_1 + Z_2,$$

wenn

$$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_\mu$$

ist, da

$$z_1 + z_2 = e^x,$$

also e^x selbst ein Integral jener Differentialgleichung ist. Stehen dagegen zwei particuläre Fundamentalintegrale in algebraischer Relation

$$(95) \cdots\cdots z_2 = f(x, z_1),$$

so folgt einerseits aus der bekannten Beziehung

$$z_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = ce^{-\int P\,dx}$$

die Gleichung

$$(96) \cdots\cdots z_1\frac{\partial f}{\partial x} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} - f\frac{dz_1}{dx} = c_1e^{-\int P\,dx},$$

in welcher c_1 eine bestimmte, den in Frage stehenden z_1 und z_2 zugehörige Constante bedeutet, andererseits führt die Bedingung, dass

z_1 und z_2 durch die Beziehung (95) mit einander verbunden sind, wie schon aus der Gleichung (18) des § 3 gefolgert wurde, auf die Beziehung

$$(97) \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0;$$

da nun die beiden Gleichungen (96) und (97) zu gleicher Zeit stattfinden müssen, so wird man den Werth von $\frac{dz_1}{dx}$ aus (96) in (97) einsetzen können und auf diese Weise eine Gleichung erhalten

$$(98) \cdots F(x, z_1, c_1 e^{-\int P dx}) = 0.$$

Vor allem ist klar, dass diese Gleichung, vorausgesetzt, dass P nicht das logarithmische Differential einer algebraischen Function ist, nicht eine in der Transcendenten $e^{-\int P dx}$ identische Gleichung sein kann; denn es folgt, wie man durch Ausführung der Elimination unmittelbar sieht, dass das Verschwinden der Coefficienten von

$$e^{-2\int P dx} \text{ und } e^{-\int P dx},$$

wenn z_1 selbst als nicht algebraisch vorausgesetzt wird, die Gleichungen nach sich zieht,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} = 0,$$

d. h. es wäre $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ eine Constante, und jene algebraische Relation von der Form

$$z_2 = Az_1 + B,$$

worin A eine Constante und B eine algebraische Function von x ist; dies kann aber nicht sein, da dann auch B ein Integral wäre, und die Differentialgleichung somit ein algebraisches Integral hätte, welcher Fall ausgeschlossen werden soll; es kann somit (98) keine in der Transcendenten identische Gleichung sein, sondern wird die Form annehmen

$$e^{-\int P dx} = F_1(x, z_1),$$

worin F_1 eine algebraische Function bedeutet, und hieraus folgt offenbar wieder ein Abel'sches Theorem von der Gestalt

$$F_1(x_1, z_1^{(1)}) F_1(x_2, z_1^{(2)}) \cdots F_1(x_\mu, z_1^{(\mu)}) = F_1(X_1, Z_1^{(1)}) \cdots F_1(X_p, Z_1^{(p)}).$$

Es war nun oben die Annahme gemacht worden, dass P nicht das logarithmische Differential einer algebraischen Function $\varphi(x)$ sein sollte, in welchem Falle die Transcendente $e^{\int P dx} = \varphi(x)$ würde;

wäre dies der Fall, so ginge die Gleichung (96) in

$$(99) \cdots\cdot z_1 \frac{\partial f}{\partial x} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dx} - f \frac{dz_1}{dx} = c_1 \varphi(x)$$

über, und es fragt sich, was aus (98) und (99) für das Abel'sche Theorem gefolgert werden kann. Wir wollen jedoch bei dieser Gelegenheit die Frage allgemein erörtern, was man aus der Annahme, dass zwischen zwei particulären, nicht algebraischen Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine algebraische Beziehung stattfindet, schliessen kann — eine Untersuchung, welche die am Ende des § 3 angestellte ergänzt — und erst dann wieder auf das vorliegende Problem zurückkommen.

Nehmen wir also an, es bestehe zwischen z_1 und z_2 eine algebraische Gleichung

$$z_2 = f(x, z_1),$$

so dass z_1, wie oben gezeigt worden, der Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0,$$

so war früher bewiesen worden, dass, wenn eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, diese letztere ein algebraisches Integral der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung ist; denken wir uns also die obige Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf x und z_1 rational gemacht, so wird ein in Bezug auf $\frac{dz}{dx}$ algebraisch irreductibeler Factor, weil derselbe durch $z = z_1$ befriedigt wird, alle Integrale mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung gemein haben, alle seine Integrale werden also die Form haben

$$z = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2,$$

worin μ_1 und μ_2 von einer willkürlichen Constanten abhängige constante Parameter sind; da nun ferner zwischen einem Integrale z_2 der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und dem nicht algebraischen Integrale z_1 der in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung der oben angenommene algebraische Zusammenhang stattfindet, so muss derselbe nach dem Satze I des § 5 erhalten bleiben, wenn statt z_1 ein willkürliches Integral der Differentialgleichung erster Ordnung und statt z_2 ein passendes derjenigen zweiter Ordnung substituirt wird. Es folgt also die Beziehung

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = f(x, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$$

oder

$$f(x, \mu_1 z_1 + \mu_2 f(x, z_1)) = m_1 z_1 + m_2 f(x, z_1),$$

worin μ_1, μ_2, m_1, m_2 bestimmte Functionen einer willkürlichen Constanten λ sind. Die Differentiation dieser Gleichung nach z_1 und λ — und diese ist erlaubt, weil jene Gleichung z_1 nicht als algebraische Function von x der Voraussetzung nach ergeben darf, also in dieser Grösse z_1 identisch sein muss — liefert die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1 + \mu_2 f(x, z_1))}{\partial(\mu_1 z_1 + \mu_2 f(x, z_1))}\left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1}\right) = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1}$$

$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1 + \mu_2 f(x, z_1))}{\partial(\mu_1 z_1 + \mu_2 f(x, z_1))}\left(z_1 \frac{d\mu_1}{d\lambda} + f(x, z_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}\right)$$

$$= z_1 \frac{dm_1}{d\lambda} + f(x, z_1)\frac{dm_2}{d\lambda},$$

woraus sich durch Division unmittelbar ergiebt

$$A f(x, z_1)\frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1} + B z_1 \frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1} + C f(x, z_1) + D z_1 = 0,$$

worin A, B, C, D Constanten bedeuten, und diese Gleichung kann, da sie für jedes z_1 bestehen muss, als eine Differentialgleichung in der unabhängigen Variabeln z_1 und der abhängigen $f(x, z_1) = Z_1$ von der Form aufgefasst werden

$$dZ_1(AZ_1 + Bz_1) + dz_1(CZ_1 + Dz_1) = 0,$$

worin jedoch Z_1 eine algebraische Function von z_1 sein soll.

Das Integral dieser homogenen Differentialgleichung erster Ordnung ist bekanntlich, wenn $Z_1 = z_1 u$ gesetzt wird,

$$\log z_1 + \int \frac{(Au + B)du}{Au^2 + (B + C)u + D} = c,$$

worin c eine von z_1 und u unabhängige, aber noch von x abhängige Grösse bedeutet, oder wie unmittelbar zu sehen,

$$\frac{(u-\alpha)^{\frac{\mu}{\mu-\nu}}}{(u-\beta)^{\frac{\nu}{\mu-\nu}}} = \frac{\varkappa}{z_1},$$

worin α, β, μ, ν Constanten, $\varkappa$ von x abhängig ist, oder endlich, da $u = \frac{Z_1}{z_1}$ und $Z_1 = f(x, z_1) = z_2$ ist,

$$(100) \; \ldots \; \frac{\left(\frac{Z_1}{z_1} - \alpha\right)^{\frac{\mu}{\mu-\nu}}}{\left(\frac{Z_1}{z_1} - \beta\right)^{\frac{\nu}{\mu-\nu}}} = \frac{\varkappa}{z_1}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\left(\frac{z_2}{z_1} - \alpha\right)^{\frac{\mu}{\mu-\nu}}}{\left(\frac{z_2}{z_1} - \beta\right)^{\frac{\nu}{\mu-\nu}}} = \frac{\varkappa}{z_1}.$$

Ohne nun auf die Functionalgleichung zurückzugehen und weitere Bedingungen für die in der zuletzt gefundenen Form vorkommenden Constanten zu ermitteln, können wir unmittelbar folgern, dass, wenn wir statt von der Beziehung $z_2 = f(x, z_1)$ auszugehen, die inverse Beziehung $z_1 = F(x, z_2)$ zu Grunde gelegt hätten, wir zu dem Ausdrucke gelangt wären

$$\frac{\left(\frac{z_1}{z_2} - a\right)^{\frac{m}{m-n}}}{\left(\frac{z_1}{z_2} - b\right)^{\frac{n}{m-n}}} = \frac{k}{z_2},$$

worin wiederum a, b, m, n Constanten und k von x abhängig ist. Da nun aus der zweiten Gleichung folgt

$$(101) \ldots \frac{\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{m-n}}}{\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{1}{b}\right)^{\frac{n}{m-n}}} = -k\,\frac{b^{\frac{n}{m-n}}}{a^{\frac{m}{m-n}}}\,\frac{1}{z_1},$$

so wird diese Beziehung, da z_1 und z_2 nicht algebraische Functionen von x sein sollen, mit (100) identisch sein müssen, und es ergiebt sich somit

$$a = \frac{1}{\alpha},\quad b = \frac{1}{\beta},\quad m = \mu,\quad n = \nu,\quad k = -\varkappa\,\frac{\beta^{\frac{\nu}{\mu-\nu}}}{\alpha^{\frac{\mu}{\mu-\nu}}}.$$

Da die Beziehung zwischen z_2 und z_1 eine algebraische sein soll, so werden $\frac{\mu}{\mu-\nu}$ und $\frac{\nu}{\mu-\nu}$ rationale Zahlen sein müssen, wobei offenbar μ und ν als ganze Zahlen betrachtet werden können; da aber

$$\frac{\mu}{\mu-\nu} - \frac{\nu}{\mu-\nu} = 1,$$

so folgt, dass, wenn $\frac{\nu}{\mu-\nu} = \lambda$ gesetzt wird, die obige Beziehung in

$$\frac{\left(\frac{z_2}{z_1} - \alpha\right)^{\lambda+1}}{\left(\frac{z_2}{z_1} - \beta\right)^{\lambda}} = \frac{\varkappa}{z_1},$$

oder in

$$(102) \ldots \frac{(z_2 - \alpha z_1)^{\lambda+1}}{(z_2 - \beta z_1)^{\lambda}} = \varkappa$$

übergeht, worin λ eine rationale Zahl und $\varkappa$ eine algebraische Function von x bedeutet. Hat die Gleichung $Au^2 + (B + C)u + D = 0$ zwei gleiche Lösungen, so überzeugt man sich unmittelbar, dass das

Integral der oben aufgestellten Differentialgleichung in x und u nur dann auf eine algebraische Beziehung führt, wenn $B = C$ ist, und dann lautet die gesuchte Beziehung zwischen z_1 und z_2

$$z_2 - \alpha z_1 = \varkappa$$

und wäre somit in der obigen für $\beta = \alpha$ enthalten. Ist endlich $A = 0$, so geht die obige Gleichung in

$$\log z_1 + \int \frac{B\,du}{(B + C)u + D} = c$$

über, welche somit, wie unmittelbar zu sehen, die Beziehung liefert

$$(z_2 + \alpha z_1)^\varrho = \varkappa z_1^{\varrho - 1},$$

worin wieder ϱ eine rationale Zahl und $\varkappa$ eine algebraische Function von x sein wird*); aber auch diese Beziehung kann man als in der Form (102) enthalten betrachten, wenn man in jener $\beta = \infty$, $\lambda + 1 = \varrho$ und $\varkappa$ statt $(-\beta)^{\varrho - 1}\varkappa$ setzt, — *so dass die Beziehung* (102) *die einzig mögliche algebraische Beziehung zwischen zwei particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert, vorausgesetzt, dass diese Integrale nicht selbst algebraische Functionen sind.*

Wir kehren nun nach Feststellung der allgemeinen algebraischen Relation (102) zwischen z_1 und z_2 wieder zur Herleitung des für diesen Fall einer reductibeln linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung geltenden Abel'schen Theorems zurück, das jedoch nur für den Fall noch zu entwickeln war, in welchem

$$P = \frac{d \log \varphi(x)}{dx}$$

und $\varphi(x)$ eine algebraische Function von x ist. Da aber in der Beziehung (102) die Grössen

$$z_2 - \alpha z_1 = Z_2, \quad z_2 - \beta z_1 = Z_1$$

wieder particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, weil α und β Constanten bedeuten, jene Beziehung also in die Form gesetzt werden kann

$$\frac{Z_2^{\mu + \nu}}{Z_1^\mu} = \varkappa^\nu,$$

---

*) Ist $A = 0$, $D = 0$, $B = -C$, so geht die Differentialgleichung zwischen z_1 und Z_1 in $z_1\,dZ_1 - Z_1\,dz_1 = 0$ über, deren Integral $Z_1 = \varkappa z_1$ ist, so dass die Beziehung zwischen den particulären Integralen die Form annimmt $z_2 = \varkappa z_1$, worin $\varkappa$ eine algebraische Function bedeutet, wie dies z. B. der Fall ist bei einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten, wenn die die Grösse m im particulären Integrale e^{mx} definirende quadratische Gleichung zwei gleiche Lösungen hat.

worin μ und ν ganze Zahlen, oder in

$$(103) \cdots \cdot Z_2 = K Z_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}},$$

wenn K wiederum eine algebraische Function von x bedeutet, so wird die bekannte Beziehung

$$Z_1 \frac{dZ_2}{dx} - Z_2 \frac{dZ_1}{dx} = Ce^{-\int P dx} = \frac{C}{\varphi(x)}$$

wegen

$$\frac{dZ_2}{dx} = \frac{\mu}{\mu+\nu} K Z_1^{-\frac{\nu}{\mu+\nu}} \frac{dZ_1}{dx} + K' Z_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}$$

in

$$-\frac{\nu}{\mu+\nu} K Z_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \frac{dZ_1}{dx} + K' Z_1^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}} = \frac{C}{\varphi(x)}$$

übergehen; setzt man nun

$$Z_1^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}} = t,$$

so folgt unmittelbar

$$\frac{dt}{dx} - \frac{2\mu+\nu}{\nu} \frac{d \log K}{dx} t = - \frac{C(2\mu+\nu)}{\nu} \frac{1}{K\varphi(x)},$$

d. h.

$$t = K^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}} \left(C_1 - \frac{C(2\mu+\nu)}{\nu} \int \frac{dx}{K^{\frac{2(\mu+\nu)}{\nu}} \varphi(x)} \right),$$

worin C_1 eine Constante bedeutet; es ist somit

$$Z_1^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}} : K^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}$$

ein Abel'sches Integral, und daher, wenn wir wieder von hinzukommenden algebraisch-logarithmischen Theilen absehen, das Abel'sche Theorem für das Integral Z_1 jener Differentialgleichung oder für $z_2 - \beta z_1$ in der Form enthalten

$$\frac{\left(z_2^{(1)} - \beta z_1^{(1)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_1^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}} + \frac{\left(z_2^{(2)} - \beta z_1^{(2)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_2^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}} + \cdots + \frac{\left(z_2^{(\varrho)} - \beta z_1^{(\varrho)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_\varrho^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}}$$

$$= \frac{\left(z_2^{(I)} - \beta z_1^{(I)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_I^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}} + \cdots + \frac{\left(z_2^{(P)} - \beta z_1^{(P)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_P^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}},$$

wenn p das Geschlecht jenes Abel'schen Integrales bedeutet.

Wir haben vorher gefunden, dass, wenn zwischen zwei particulären Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung und der unabhängigen Variabeln eine algebraische Beziehung stattfinden soll, dieselbe nothwendig von der

Form (102) sein müsse, dass dann aber auch immer zwei andere particuläre Integrale existiren, für welche diese Beziehung nothwendig die Form hat

$$(104) \cdots\cdot Z_2 = K Z_1^\varrho,$$

worin K eine algebraische Function von x, und ϱ eine rationale Zahl bedeutet. Bildet man nun aus dieser Gleichung die Beziehungen für $\frac{dZ_2}{dx}$ und $\frac{d^2 Z_2}{dx^2}$ und setzt diese Werthe in die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(105) \cdots\cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0$$

ein, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass auch Z_1 eben dieser Differentialgleichung genügt,

$$(106) \cdots\cdot \left(\frac{dZ_1}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\frac{dK}{dx}}{K}\,\frac{Z_1}{\varrho-1}\,\frac{dZ_1}{dx}$$
$$= \frac{Z_1^2}{K\varrho(\varrho-1)}\left[QK(\varrho-1) - P\frac{dK}{dx} - \frac{d^2K}{dx^2}\right]$$

oder

$$(107) \cdots\cdot \frac{dZ_1}{dx} = LZ_1,$$

worin L eine algebraische Function von x bedeutet, und hieraus folgt für Z_2 die Gleichung

$$(108) \cdots\cdot \frac{dZ_2}{dx} = \left(\varrho L + \frac{\frac{dK}{dx}}{K}\right) Z_2;$$

es genügen somit die beiden particulären Integrale Z_1 und Z_2 zwei linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Da nun jedes andere particuläre Integral der Differentialgleichung (105) von der Form

$$(109) \cdots\cdot Z = m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

ist, so würde die Annahme, dass auch dieses einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\frac{dZ}{dx} = RZ$$

genügt, nach den Gleichungen (107) und (108) die Relation nach sich ziehen

$$m_1(L-R)Z_1 = m_2 Z_1^\varrho K\left[R - \varrho L - \frac{\frac{dK}{dx}}{K}\right],$$

welche, da Z_1 nicht algebraisch sein durfte, in Bezug auf Z_1 identisch sein muss und daher $\varrho = 1$ liefert; es werden somit die anderen particulären Integrale nur dann ebenfalls homogenen linearen Differentialgleichungen genügen können, wenn die zwischen den beiden Fundamentalintegralen bestehende algebraische Beziehung

$$(110) \cdots\cdot Z_2 = KZ_1$$

lautet; in diesem Falle wird aber auch umgekehrt jedes particuläre Integral (109) einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen, indem, wie leicht zu sehen,

$$\frac{d(m_1 Z_1 + m_2 Z_2)}{dx} = \left(L + \frac{m_2 \frac{dK}{dx}}{m_1 + m_2 K} \right) (m_1 Z_1 + m_2 Z_2)$$

ist.

Fassen wir nunmehr die im § 3 und eben jetzt erhaltenen Resultate zusammen; dort war gezeigt worden, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht irreductibel ist, entweder zwei ihrer particulären Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen müssen, oder dass eines ihrer Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung Genüge leistet, welche ein algebraisches Integral der gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist; wir haben aber jetzt nachgewiesen, dass auch, wenn zwei particuläre Fundamentalintegrale und die unabhängige Variable algebraisch mit einander verbunden sind, nothwendig ein particuläres Integral der Differentialgleichung existirt, welches einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, und dass diese Eigenschaft nur dann für alle particulären Integrale statthat, wenn zwei Fundamentalintegrale durch die Gleichung (110) mit einander verbunden sind. Wir erhalten somit folgenden Satz:

Jede nicht irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt particuläre Integrale, welche einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leisten, oder hat eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung als Integral, oder auch, *wenn ein nicht algebraisches Integral derselben einer Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet, so giebt es jedenfalls auch andere particuläre Integrale, welche eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen.*

Um für *irreductible* Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu einem Abel'schen Theorem zu gelangen, wird man erst diejenigen Klassen dieser Differentialgleichungen zu untersuchen haben, für welche zwischen zwei particulären Integralen und einem Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung ein algebraischer Zusammenhang besteht — die Erweiterung des vorher betrachteten algebraischen Zusammenhanges zwischen zwei particulären Integralen unter einander — um dann mit Hülfe des für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellten Abel'schen Theorems dasjenige für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung abzuleiten. Die Untersuchung führt auf analoge Sätze zu denen des § 3, in denen nur die algebraische

Function durch das transcendente Integral der Differentialgleichung erster Ordnung ersetzt ist, doch stehen wir davon ab, auf weitere Einzelheiten näher einzugehen, da es uns nur darauf ankam, die Anwendbarkeit der oben aufgestellten Sätze und Methoden zu zeigen, und ziehen es vor, im Folgenden noch eine Reihe von Fragen, welche die linearen Differentialgleichungen betreffen, ausführlich zu behandeln, sowie einige schwierigere Punkte der Integralrechnung zu erörtern*).

---

*) Es mag hier nur noch einer Anwendung der im § 5 aufgestellten Sätze von der Erhaltung der algebraischen Relation kurz Erwähnung geschehen, welche die Ermittlung des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung zum Gegenstande hat, wenn man eine algebraische Beziehung kennt, welche ein particuläres Integral derselben mit einem particulären Integrale einer anderen Differentialgleichung derselben Ordnung verbindet, deren allgemeines Integral bekannt ist. Seien z. B. die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

und ein particuläres Integral z_1 der ersten mit einem particulären z_2 der zweiten durch die algebraische Beziehung verbunden

$$F(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{oder} \quad z_2 = \psi(x, z_1),$$

so wird bekanntlich, wenn z_1 ein nicht algebraisches Integral und die erste Differentialgleichung in Bezug auf $\frac{dz}{dx}$ algebraisch irreductibel ist, die algebraische Relation erhalten bleiben, wenn man für z_1 ein beliebiges anderes Integral der ersten Differentialgleichung setzt, vorausgesetzt, dass man für z_2 ein passendes Integral der zweiten substituirt; setzt man nun für z_1 das allgemeine Integral der zugehörigen Differentialgleichung, so wird z_2, weil es ein Integral der betreffenden Differentialgleichung bleibt und zugleich eine willkürliche Constante enthält, das allgemeine Integral der zweiten Differentialgleichung darstellen. So stehen die particulären Integrale

$$z_1 = x + x \log x \quad \text{und} \quad z_2 = x^2 + 2x^2 \log x + x^2 (\log x)^2 = (x + x \log x)^2$$

der respectiven Differentialgleichungen

$$x \frac{dz}{dx} - z = x \quad \text{und} \quad x^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 4xz \frac{dz}{dx} = 4x^2 z - 4z^2$$

in der algebraischen Beziehung

$$z_2 = z_1^2;$$

da nun das allgemeine Integral der ersten Differentialgleichung bekanntlich durch den Ausdruck gegeben ist

$$Z_1 = cx + x \log x,$$

worin c eine willkürliche Constante bedeutet, so liefert der Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung ein Mittel zur Auffindung des allgemeinen Integrales der zweiten Differentialgleichung in der Form

$$Z_2 = (cx + x \log x)^2.$$

Viertes Kapitel.

Ueber die Form der durch Quadraturen darstellbaren Integrale linearer, nicht homogener Differentialgleichungen.

§ 10.

Herleitung einfacherer charakteristischer Formen aus der Existenz algebraisch-logarithmischer Integrale linearer Differentialgleichungen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich zumeist auf höhere lineare Differentialgleichungen und sollen eine Erweiterung derjenigen Untersuchungen von Abel liefern, welche sich mit den Bedingungen und der Form der Reduction Abel'scher Integrale beschäftigen.

Bekanntlich hat Abel den Satz bewiesen, dass, wenn y eine algebraische Function von x bedeutet und $\int y\,dx = z$ selbst algebraisch ist, dann z stets *rational* durch x und y ausdrückbar ist, oder auch anders ausgesprochen, dass nicht nur, was selbstverständlich ist, die Ableitung einer algebraischen Function rational durch diese Function, sondern auch umgekehrt, da

$$\int \frac{dz}{dx}\,dx = z$$

ist, jede algebraische Function rational durch ihre Ableitung ausdrückbar ist, in welche Ausdrücke die unabhängige Variable rational eintritt. Es mag dieser Satz hier erst, ein wenig verallgemeinert, in einfacher Weise bewiesen werden, bevor wir ihn auf Differentialgleichungen übertragen; bedeutet $\varphi(x, z)$ eine rationale Function von x und z, so wird sich nach bekannten Sätzen der Algebra, wenn z durch die algebraische Gleichung

$$(1) \cdots\cdot z^{\varkappa} + \varphi_1(x)\, z^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_{\varkappa-1}(x)\, z + \varphi_{\varkappa}(x) = 0$$

definirt ist, $\varphi(x, z)$ als eine ganze Function $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Grades in z mit in x rationalen Coefficienten in der Form

$$(2) \cdots\cdot \varphi(x, z) = \chi_0(x) + \chi_1(x)\, z + \cdots + \chi_{\varkappa-1}(x)\, z^{\varkappa-1}$$

Dieselbe Integrationsmethode würde offenbar stets dann anwendbar sein, wenn die beiden Differentialgleichungen von derselben Ordnung sind, indem die Einführung des allgemeinen Integrales der einen Differentialgleichung die für das allgemeine Integral der anderen hinreichende Anzahl von Constanten liefern würde, während, wenn die beiden Gleichungen verschiedene Ordnung haben, nur eine allgemeinere Klasse particulärer Integrale dadurch geliefert wird — immer vorausgesetzt, dass z_1 nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung angehört.

darstellen lassen, und fasst man die Gleichung (2) als eine Gleichung $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Grades in z auf, wobei in $\varphi(x, z)$ die Grösse z die bestimmte Lösung der Gleichung (1) bedeutet, so werden jedenfalls die beiden Gleichungen (1) und (2) diese *eine* Lösung z gemein haben. Haben dieselben *nur eine* Lösung gemein, so liefert z. B. die Operation der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers, der in diesem Falle ein in z linearer sein wird, z als rationale Function von x und $\varphi(x, z)$; haben die beiden Gleichungen, in denen $\varphi(x, z)$ als Parameter aufzufassen ist, jedoch mehrere gemeinsame Lösungen, so würde offenbar, wenn z_1 und z_2 zwei derselben sind,

$$(3) \cdots\cdot \varphi(x, z_2) = \varphi(x, z_1)$$

sein müssen, da die Gleichung (2) für jede Lösung der Gleichung (1) gültig ist. Bildet man also z. B., indem $\varphi(x, z) = y$ und für z die Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$ der Gleichung (1) gesetzt werden, die Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades in y

$$(4) \cdots\cdot y^\varkappa + F_1(x)\, y^{\varkappa-1} + \cdots + F_{\varkappa-1}(x)\, y + F_\varkappa(x) = 0,$$

und nimmt weiter an, dass diese Gleichung ebenfalls irreductibel ist, so wird die aus (3) folgende Beziehung $y_2 = y_1$ offenbar nicht bestehen können, und somit z_1 durch x und $\varphi(x, z_1)$ rational ausdrückbar sein; wir erhalten somit den in etwas anderer Form bekannten Satz, *dass jede algebraische Function z von x sich durch x und eine solche rationale Function von x und z rational ausdrücken lässt, die nicht für zwei verschiedene Werthe der Function z gleiche Werthe annimmt.*

Eine solche rationale Function von x und z ist z. B. $\frac{dz}{dx}$, wenn die algebraische Gleichung (1) als eine irreductible vorausgesetzt wird; denn wäre $\frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_2}{dx}$, also $z_2 = z_1 + c$, worin c eine Constante bedeutet, dann würde aus den beiden Gleichungen

$$z_1^\varkappa + \varphi_1(x)\, z_1^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_\varkappa(x) = 0$$

$$(z_1 + c)^\varkappa + \varphi_1(x)\,(z_1 + c)^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_\varkappa(x) = 0$$

sich ergeben

$$\varkappa c z_1^{\varkappa-1} + \Phi_2(x)\, z_1^{\varkappa-2} + \cdots + \Phi_\varkappa(x) = 0,$$

was wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (1) und der gleichartigen Beschaffenheit der Coefficienten der letzten Gleichung mit denen von (1) unmöglich ist, und es wird sich daher *jede algebraische Function rational durch ihre Ableitung und die unabhängige*

Variable ausdrücken lassen. Ebenso wird $\varphi(x, z) = \frac{d[zF(x)]}{dx}$, worin $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, der geforderten Bedingung genügen, da die Relation

$$\frac{d(z_2 F(x))}{dx} = \frac{d(z_1 F(x))}{dx} \quad \text{oder} \quad z_2 = z_1 + \frac{c}{F(x)}$$

unmöglich bestehen kann, weil, wie man genau ebenso einsieht, die Lösungen einer irreductibeln Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, sich nicht nur um rationale Functionen der Variabeln unterscheiden dürfen; *es wird sich somit jede algebraische Function rational durch den Differentialquotienten dieser mit einer beliebigen rationalen Function von x multiplicirten Function ausdrücken lassen.* Dagegen wird sich die algebraische Function z nicht immer rational durch x und den Ausdruck $\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$ darstellen lassen, wie man z. B. aus

$$z = x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\frac{dz}{dx}}{z} = \frac{3}{2x}$$

ersieht, oder es wird sich nicht — was dasselbe ist — z stets rational durch x und $\frac{d \log z}{dx}$ ausdrücken lassen, vielmehr sagt ein weiterer Abel'scher Satz, mit dessen Ausdehnung wir uns nachher beschäftigen werden, nur aus, dass, wenn das Integral einer algebraischen Function sich logarithmisch ausdrücken lässt, wie in

$$\int \frac{\frac{dz}{dx}}{z} dx = \log z,$$

dieser logarithmische Werth sich in die Form $\frac{1}{\delta} \log w$ setzen lassen muss, worin δ eine ganze Zahl, und w sich rational durch x und die unter dem Integral stehende algebraische Function, in unserem Falle durch x und $\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$, ausdrücken lässt.

Sei nun eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gegeben

$$(5) \cdots f\left(x, y_1, y_2, \cdots y_\mu, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

in welcher $y_1, y_2, \cdots y_\mu$, irreductible algebraische Functionen von x bedeuten, und nehmen wir an, dass diese Differentialgleichung ein algebraisches Integral besitze, so ist leicht einzusehen, dass ihr im Allgemeinen auch noch andere algebraische Integrale genügen werden;

denn sei jenes algebraische Integral durch die Gleichung definirt

$$(6) \cdots\cdot z^\varkappa + \varphi_1(x, y_1, y_2, \cdots y_\mu)\, z^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_\varkappa(x, y_1, y_2, \cdots y_\mu) = 0,$$

welche mit Adjungirung der Functionen $y_1, y_2, \cdots y_\mu$ als irreductibel angenommen werden soll, so werden die Ableitungen von z durch z selbst mit Hülfe eben dieser Functionen rational ausdrückbar sein, so dass durch Einsetzen dieser Werthe die linke Seite der Gleichung (5) in eine rationale Function von z übergeht, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, y_2, \cdots y_\mu$ zusammengesetzt sind; da diese Gleichung nun bekanntlich mit der irreductiblen algebraischen Gleichung (6) alle Lösungen der letzteren gemein haben muss, so wird auch der Differentialgleichung (5) jede Lösung der letzteren genügen, dieselbe also im Allgemeinen $\varkappa$ algebraische Integrale haben. Ist jene Differentialgleichung eine lineare von der Form

$$(7) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Y_2 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \cdots + Y_m z = y,$$

worin $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y$ irreductible algebraische Functionen bedeuten, und ist jenes angenommene algebraische Integral, das durch die Gleichung definirt wird

$$(8) \cdots\cdot z^\varkappa + \varphi_1(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y)\, z^{\varkappa-1} + \cdots$$
$$+ \varphi_\varkappa(x, Y_1, Y_2, Y_m, y) = 0,$$

z. B. eine durch algebraische Irrationalitäten darstellbare Function μ^{ter} Ordnung und σ^{ten} Grades, hat also nach Abel*) in bekannten Zeichen die Form

$$(9) \cdots\cdot z = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

worin $q_0, q_1, \cdots q_{n-1}$ algebraische Functionen μ^{ter} Ordnung und $\sigma - 1^{\text{ten}}$ Grades, n eine Primzahl und p eine algebraische Function $\mu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung sind, so wird nach den obigen Auseinandersetzungen, wenn α eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet, auch

$$(10) \cdots\cdot z_\nu = q_0 + q_1 \alpha^\nu p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^{2\nu} p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} \alpha^{(n-1)\nu} p^{\frac{n-1}{n}}$$

für jedes ganzzahlige ν ein Integral der Differentialgleichung (7) sein, und da, wenn $z_1, z_2, \cdots z_\varrho$ ϱ Integrale der Gleichung (7) bedeuten, stets auch

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_\varrho}{\varrho},$$

ein Integral der Differentialgleichung ist, so folgt aus der Addition der Gleichungen (9) und (10) für $\nu = 1, 2, \cdots n-1$, dass auch q_0 ein Integral jener Differentialgleichung sein wird; da ferner die Function z_ν

*) „Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, qui passent le quatrième degré" oeuvres compl. d'Abel tome I.

der Differentialgleichung (7) Genüge leistet, also für jedes ganzzahlige r und ν $\alpha^{-r\nu} z_\nu$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(11) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = \alpha^{-r\nu} y$$

ist, so werden die Gleichungen bestehen

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = y$$

$$\frac{d^m (\alpha^{-r\nu} z_\nu)}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} (\alpha^{-r\nu} z_\nu)}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m (\alpha^{-r\nu} z_\nu) = \alpha^{-r\nu} y,$$

aus denen, wenn $\nu = 1, 2, \cdots n-1$ gesetzt wird, folgt, dass

$$\frac{d^m (z + \alpha^{-r} z_1 + \alpha^{-2r} z_2 + \cdots + \alpha^{-(n-1)r} z_{n-1})}{dx^m} + \cdots$$
$$+ Y_m (z + \alpha^{-r} z_1 + \cdots + \alpha^{-(n-1)r} z_{n-1}) = 0$$

ist, oder dass der Ausdruck

$$(12) \cdots\cdot Z = z + \alpha^{-r} z_1 + \alpha^{-2r} z_2 + \cdots + \alpha^{-(n-1)r} z_{n-1}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^m Z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} Z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m Z = 0,$$

d. h. der reducirten Differentialgleichung von (7) sein wird. Bemerkt man aber nun, dass der Ausdruck (12) vermöge der Gleichungen (9) und (10) die Beziehung liefert

$$Z = q_r p^{\frac{r}{n}},$$

so ergiebt sich der folgende Satz:

Besitzt eine lineare nicht homogene Differentialgleichung beliebiger Ordnung ein algebraisches Integral, das sich durch algebraische Irrationalitäten, also nach Abel in der Form darstellen lässt

$$q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

so ist q_0 selbst wieder ein Integral jener Differentialgleichung, während die Grössen

$$q_1 p^{\frac{1}{n}}, \; q_2 p^{\frac{2}{n}}, \; \cdots \; q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

Integrale der reducirten Differentialgleichung jener sind.

Untersuchen wir nun vorerst nicht die Form der algebraischen Integrale — wir kommen später auf diese Frage zurück — sondern suchen wir Folgerungen aus der Existenz eines algebraischen Integrales der Differentialgleichung (7) für die Beschaffenheit anderer algebraischer Integrale eben dieser Differentialgleichung herzuleiten,

so ist leicht einzusehen, dass, weil alle Lösungen der irreductibeln Gleichung (8), wie oben gezeigt worden, Integrale der Differentialgleichung sind, und somit auch die Summe dieser $\varkappa$ Lösungen durch $\varkappa$ dividirt der Differentialgleichung genügen muss, nothwendig auch

$$z = -\frac{1}{\varkappa}\varphi_1(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y)$$

die Differentialgleichung (7) befriedigt, und diese somit, wenn sie überhaupt ein algebraisches Integral besitzt, auch ein in den Coefficienten der Differentialgleichung rationales Integral hat, wenn die Summe aller Lösungen der Gleichung (8) nicht eine endliche oder verschwindende Constante ist; ist nun die Gleichung (7) eine homogene, so kann dies in der That der Fall sein, und dann könnte man nicht auf die Existenz eines solchen in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Integrales schliessen — ist jedoch y von Null verschieden, so kann nur dann ein constantes Integral $z = C$ existiren, wenn $C \cdot Y = y$ ist, in welchem Falle aber die Differentialgleichung (7) durch die Substitution $z - C = \zeta$ in die homogene Gleichung

$$\frac{d^m\zeta}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{d\zeta}{dx} + Y_m\zeta = 0$$

übergeht, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hat die Differentialgleichung (7) überhaupt ein algebraisches Integral, so hat sie stets auch ein in den Coefficienten dieser Differentialgleichung rationales Integral, wenn sie nicht eine homogene oder durch die Substitution $z = \zeta + cst$ auf eine homogene zurückführbare ist.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = \frac{3}{2}$$

das algebraische Integral

$$z_1 = x + x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{also auch} \quad z_2 = x - x^{-\frac{1}{2}}$$

und daher auch das rationale Integral

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = x$$

haben, während die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2x} = 0$$

die Integrale $z_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $z_2 = -x^{\frac{1}{2}}$ und für das rationale Integral $z = \frac{z_1 + z_2}{2} = 0$ liefert; die Differentialgleichung hat überhaupt kein in x rationales Integral.

Wir wollen von diesem Satze eine einfache Anwendung machen; nehmen wir an, dass man von einer linearen homogenen Differential-

gleichung m^{ter} Ordnung

$$(13) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = 0$$

weiss, dass dieselbe $m - 1$ transcendente, nicht algebraisch auf einander reducirbare Fundamentalintegrale und nur *ein* algebraisches Integral besitzt, welches durch die irreductible Gleichung

$$z^\mu + F_1(x, Y_1, \cdots Y_m) z^{\mu-1} + \cdots + F_\mu(x, Y_1, \cdots Y_m) = 0$$

definirt sein mag, so wird nach dem Vorigen auch jède andere Lösung dieser Gleichung der Differentialgleichung (13) Genüge leisten; da aber, wenn wir die erste Lösung mit z_1, eine andere mit z_2 und die $m - 1$ transcendenten Lösungen mit $Z_1, Z_2, \cdots Z_{m-1}$ bezeichnen, nothwendig

$$z_2 = m_1 z_1 + \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \cdots + \mu_{m-1} Z_{m-1}$$

sein wird, worin $m_1, \mu_1 \cdots \mu_{m-1}$ Constanten bedeuten, so würde gegen die Annahme zwischen den transcendenten Integralen $Z_1, Z_2, \cdots Z_{m-1}$ eine algebraische Beziehung bestehen, also müssen $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$ sein, ùnd somit alle μ Lösungen der obigen algebraischen Gleichung die Form haben

$$z_1, c_1 z_1, c_2 z_1, \cdots c_{\mu-1} z_1$$

und daher

$$z_1(1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{\mu-1}) = - F_1(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m),$$

d. h. das algebraische Integral wird rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sein. Ist $F_1 = 0$, so folgt

$$z_1^2 \Sigma c_\alpha c_\beta = F_2(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m),$$

d. h. es ist z_1 die Quadratwurzel aus einer in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Function, allgemein kann man schliessen, *dass, wenn eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $m - 1$ von einander algebraisch unabhängige transcendente Integrale und nur ein algebraisches Integral besitzt, dieses letztere nothwendig die Lösung einer binomischen, in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Gleichung sein wird*, oder im speciellen Falle, *dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ein transcendentes und ein algebraisches Integral besitzt, das letztere eine Wurzel aus einer in den Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbaren Function ist*, und diese Untersuchung kann man verallgemeinern, indem man statt der Voraussetzung des einen algebraischen Integrales die Voraussetzung nur *eines* Integrales macht, welches die gegebene Differentialgleichung mit einer Differentialgleichung erster, zweiter Ordnung u. s. w. gemein hat.

Gehen wir nun wieder zu der früheren Untersuchung zurück und nehmen an, dass die Differentialgleichung (7) ein logarithmisches Integral von der Form

$$z = A \log v$$

hat, worin A eine Constante und v eine algebraische Function von x bedeutet, so ist vor allem klar, dass $Y_m = 0$ sein muss, da die Ableitungen von $\log v$ algebraische Functionen von x sind. Bezeichnen nun $v_1, v_2, \cdots v_\lambda$ die λ Lösungen der die Grösse v definirenden algebraischen irreductibeln Gleichung

$$v^\lambda + \omega_1(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y)v^{\lambda-1} + \cdots$$
$$+ \omega_\lambda(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y) = 0,$$

so ist wieder leicht zu sehen, dass auch

$$A \log v_1, A \log v_2, \cdots A \log v_\lambda$$

Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein werden, da das Einsetzen dieser Werthe wieder eine algebraische Gleichung in v definirt, welche mit der obigen irreductibeln alle Lösungen gemein haben muss, daher wird auch die Function

$$A \frac{\log v_1 + \log v_2 + \cdots + \log v_\lambda}{\lambda} = \frac{A}{\lambda} \log(v_1 v_2 \cdots v_\lambda)$$

der Differentialgleichung Genüge leisten, und es kann $v_1 v_2 \cdots v_\lambda$ keine Constante sein, da wegen $Y_m = 0$ im Falle eines constanten Integrales auch $y = 0$ sein müsste, d. h. die lineare Differentialgleichung eine homogene wäre; wir erhalten somit den Satz, *dass, wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung ein logarithmisches Integral $A \log v$ besitzt, dessen Logarithmand v eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln ist, derselben jedenfalls auch ein logarithmisches Integral $\frac{A}{\lambda} \log w$ angehört, dessen Logarithmand rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt ist, und worin λ eine ganze Zahl bedeutet.*

Für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung werden sich die beiden eben bewiesenen Sätze noch anders und allgemeiner fassen lassen; denn sei zuerst die specielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

so beschaffen, dass sie ein algebraisches Integral hat, so wird dieses, da sie nach dem Obigen ein anderes in x und y rationales Integral besitzen muss, andererseits aber nur um eine additive Constante verschiedene Integrale besitzt, selbst in x und y rational sein — also der Abel'sche Satz; ist das Integral jedoch logarithmisch von der

Form $A \log v$, so wird, weil ein anderes $\frac{A}{\lambda} \log w$ existirt, worin w rational aus x und y zusammengesetzt ist, und alle Integrale sich nur um eine additive Constante unterscheiden,

$$A \log v = \frac{A}{\lambda} \log w + \frac{A}{\lambda} \log c = \frac{A}{\lambda} \log wc$$

sein müssen, und es wird sich somit das logarithmische Integral umgestalten lassen in ein ähnliches, in welchem der Logarithmand rational aus x und y zusammengesetzt ist, oder es muss sich v in die Form setzen lassen $\sqrt[\lambda]{wc}$, also wiederum der bekannte Abel'sche Satz. Untersuchen wir nunmehr die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + zY = y,$$

in welcher Y und y irreductible algebraische Functionen sein sollen, und nehmen von dieser an, dass sie *ein* algebraisches Integral besitzt; es folgt dann aus den obigen Auseinandersetzungen, dass, vorausgesetzt dass sich y von Y nicht nur um einen constanten Factor unterscheidet, jedenfalls auch ein algebraisches Integral jener Differentialgleichung existirt, welches rational in x, y, Y ausdrückbar ist. Wir wollen nun die Form eines jeden algebraischen Integrales jener Differentialgleichung in Bezug auf seine Ausdrückbarkeit in x, y, Y untersuchen; sei z_1 ein algebraisches, nicht gerade rational in jenen Grössen ausdrückbares Integral, so wird nach dem Obigen noch ein zweites algebraisches Integral z_2 existiren, für welche beide aus der Form des allgemeinen Integrales

$$z_1 = e^{-\int Y dx}\left\{c_1 + \int e^{\int Y dx} y dx\right\},\ z_2 = e^{-\int Y dx}\left\{c_2 + \int e^{\int Y dx} y dx\right\},$$

mithin

$$\frac{z_1 - z_2}{c_1 - c_2} = e^{-\int Y dx}$$

folgt, also $e^{-\int Y dx}$ sich als algebraische Function von x ergiebt; daraus folgt aber, weil

$$\int Y dx = \log\left(\frac{c_1 - c_2}{z_1 - z_2}\right)$$

ist, nach dem eben bewiesenen Satze, dass jedenfalls

$$\lambda \int Y dx = \log w$$

sein wird, worin w rational aus x und Y zusammengesetzt ist, oder dass

$$e^{\int Y dx} = \sqrt[\lambda]{w}$$

ist. Sei nun $z_1 = W$ das, wie oben bewiesen, jedenfalls existirende

in x, y, Y rationale Integral, so folgt, dass *jedes algebraische Integral* z_2 *der vorgelegten Differentialgleichung von der Form*

$$z_2 = (c_2 - c_1) \frac{1}{\sqrt[\lambda]{w}} + W$$

ist, worin w *eine in* x *und* Y, W *eine in* x, y, Y *rationale Function ist;* so hat z. B. die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2x} = x^{\frac{1}{3}}$$

die algebraischen Integrale

$$z = c\sqrt{x} + \frac{6}{5} x \cdot x^{\frac{1}{3}}.$$

§ 11.

Herleitung charakteristischer Formen aus der Existenz von Integralen linearer Differentialgleichungen, welche additiv aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt sind.

Gehen wir wiederum zu der allgemeinen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (7) zurück und nehmen an, dass derselben ein Integral von der Form genüge

$$(14) \cdots\cdot z = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varkappa \log v_\varkappa$$
$$+ \int^{\xi_1} y_1 ds + \int^{\xi_2} y_2 ds + \cdots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda ds,$$

in welchem $u, v_1, v_2, \cdots v_\varkappa, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\lambda$ algebraische Functionen von x, $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ ebensolche von s, und $A_1, A_2, \cdots A_\varkappa$ Constanten bedeuten. Setzt man diesen Werth in die Differentialgleichung ein, so werden sich alle Differentialquotienten von z als *rationale* Functionen von $u, v_1, \cdots v_\varkappa, \xi_1, \cdots \xi_\lambda, (y_1)_{\xi_1}, \cdots (y_\lambda)_{\xi_\lambda}$ ausdrücken lassen, und es würde somit z selbst eine algebraische Function von x sein, wenn nicht wieder $Y_m = 0$ würde. Ist dies nun der Fall, und bildet man die Function

$$t = \alpha u + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_\varkappa v_\varkappa + \beta_1 \xi_1 + \cdots + \beta_\lambda \xi_\lambda$$
$$+ \gamma_1 (y_1)_{\xi_1} + \cdots + \gamma_\lambda (y_\lambda)_{\xi_\lambda},$$

in welcher $\alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_\varkappa, \beta_1, \cdots \beta_\lambda, \gamma_1, \cdots \gamma_\lambda$ willkürliche Constanten bedeuten, so ist bekannt*), dass, wenn man andere lineare Functionen

*) Abel, précis d'une théorie etc.

eben dieser Grössen mit constanten Coefficienten bildet, diese als ähnliche Functionen sich rational durch t und die Coefficienten derjenigen Gleichung ausdrücken lassen, deren Lösungen all' die bezeichneten Grössen jener linearen Function sind, und die man sich herstellt, indem all' die irreductibeln Einzelgleichungen, deren Lösungen resp. $u, v_1, \cdots v_\varkappa, \xi_1, \cdots \xi_\lambda\, (y_1)_{\xi_1}, \cdots (y_\lambda)_{\xi_\lambda}$ sind und deren Coefficienten als rational aus $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ zusammengesetzt betrachtet werden sollen, mit einander multiplicirt werden. Bildet man nun soviel lineare Functionen als Einzelgrössen in Betracht kommen, so wird eine jede derselben sich aus dem so entstehenden linearen Gleichungssysteme als rationale Function von t mit in $Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ rationalen Coefficienten ergeben, und somit die linke Seite der Differentialgleichung eine Function derselben Art werden. Denkt man sich nun aber die algebraische Gleichung aufgestellt, von der eine Lösung die oben bezeichnete Function t, und welche mit Adjungirung der Grössen $Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ irreductibel sein soll, so werden sämmtliche Lösungen dieser Gleichung δ^{ten} Grades $t_1, t_2, \cdots t_\delta$ auch der in t algebraisch rational gewordenen Differentialgleichung genügen müssen, oder anders ausgesprochen, es werden alle Werthe von z Integrale jener linearen Differentialgleichung (7) sein müssen, welche aus dem Ausdrucke (14) entstehen, wenn man für $u, v_1, \cdots v_\varkappa, \xi_1, \cdots \xi_\lambda, (y_1)_{\xi_1} \cdots (y_\lambda)_{\xi_\lambda}$ diejenigen Werthe einsetzt, welche aus den rationalen Ausdrücken in t für eben diese Grössen hervorgehen, wenn man für t der Reihe nach $t_1, t_2, \cdots t_\delta$ setzt. Addirt man alle diese z-Werthe, so ist der δ-te Theil dieser Summe wieder ein Integral jener Differentialgleichung; da aber die Summe der u und das Product der entsprechenden v-Werthe als Logarithmanden sich als rationale symmetrische Functionen der $t_1, \cdots t_\delta$ rational durch die Coefficienten der t-Gleichung, d. h. durch $Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrücken lassen, da ferner die zu je einer algebraischen Irrationalität y_α gehörigen Abel'schen Integrale sich zu je p solchen Integralen addiren lassen, worin p das der Irrationalität zugehörige Geschlecht bedeutet, und die Grenzen der p Integrale Gleichungen p^{ten} Grades genügen, deren Coefficienten wieder, wie leicht zu sehen, rational und symmetrisch aus den t-Grössen, also rational aus $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ zusammengesetzt sind, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rationale Functionen eben dieser Grenzen wieder mit in den Grössen $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ rationalen Coefficienten sind, wozu jedoch noch algebraisch-logarithmische Theile kommen, welche, wie aus dem Abel'schen Theorem unmittelbar zu ersehen, selbst oder deren Logarithmanden rational in $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrückbar sind, so erhalten wir den Satz, *dass, wenn einer linearen Differential-*

gleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

ein Integral von der Form genügt

$$z = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_\varkappa \log v_\varkappa + \int^{\xi_1} y_1 ds + \cdots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda ds,$$

worin $u, v_1 \cdots v_\varkappa, \xi_1, \cdots \xi_\lambda$ *algebraische Functionen von* $x, y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ *algebraische Functionen von* s, $A_1, A_2, \cdots A_\varkappa$ *Constanten bedeuten, dann auch stets ein Integral dieser Differentialgleichung von der Form*

$$(a) \cdots\cdot z = U + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\mu \log V_\mu$$
$$+ \frac{1}{\delta} \sum_1^{p_1}{}_\varrho \int^{\eta_1^{(\varrho)}} y_1 ds + \cdots + \frac{1}{\delta} \sum_1^{p_\lambda}{}_\varrho \int^{\eta_\lambda^{(\varrho)}} y_\lambda ds$$

sein wird, worin $U, V_1, \cdots V_\mu$ *rationale Functionen von* $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ *sind,* δ *eine ganze Zahl und* $\eta_\alpha^{(\varrho)}$ *die Lösungen einer Gleichung* p_α^{ten} *Grades bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen von* $Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ *sind, und für welche die diesen Grenzen zugehörigen Irrationalitäten rational durch eben diese Grenzen und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind.*

Setzt man $\frac{dz}{dx} = \zeta$, so folgt aus der Form des Integrales (a), da die Summen von je p Integralen differentiirt symmetrische rationale Functionen der oberen Integralgrenzen werden, dass ζ eine in den Coefficienten der Differentialgleichung (7), in welcher $Y_m = 0$ ist, rationale Function wird, und dies ist für die aus (7) hervorgehende Differentialgleichung

$$\frac{d^{m-1} \zeta}{dx^{m-1}} + Y_1 \frac{d^{m-2} \zeta}{dx^{m-2}} + \cdots + Y_{m-1} \zeta = y$$

dasjenige Integral, welches aus der Existenz eines algebraischen Integrales dieser Differentialgleichung überhaupt — und dass diese ein solches hat, folgt aus der Annahme, dass die Differentialgleichung in z ein Integral von der Form (14) besitzt — als ein nothwendig ihr zukommendes, in den Coefficienten der Differentialgleichung rationales gefolgert wurde; wir können dies auch so ausdrücken, dass *die vorgelegte Differentialgleichung* (7) *unter der Annahme, dass sie ein Integral von der Form* (14) *besitzt, reductibel ist in dem Sinne, dass*

sie ein Integral mit der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = F(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y)$$

gemein hat, worin F eine rationale Function bedeutet.

Greifen wir aus dem Ausdrucke (a) eine der Summen der Abel'schen Integrale heraus, welche mit

$$\sum_1^p {}^\varrho \int^{\eta^{(\varrho)}} Y ds$$

bezeichnet werden mag, so sind also, wie oben gezeigt worden, $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots \eta^{(p)}$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$\text{(b)} \cdots \eta^p + \omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)\eta^{p-1} + \cdots + \omega_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ sind, während die zu diesen Grenzwerthen gehörigen Werthe der Irrationalität Y sich mit Hülfe der eben genannten Grössen durch die resp. Grenzen rational ausdrücken. Bilden wir nun aus (b)

$$d\eta^{(\varrho)} = f(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y, \eta^{(\varrho)})\, dx,$$

worin f eine rationale Function sein wird, und multipliciren diese Beziehung mit irgend einer solchen rationalen Function von $\eta^{(\varrho)}$ und $(Y)_{\eta^{(\varrho)}}$

$$\Omega(\eta^{(\varrho)}, (Y)_{\eta^{(\varrho)}}),$$

dass das links stehende Differential ein solches erster Gattung wird, so folgt durch Summation nach ϱ von 1 bis p

$$\sum_1^p {}^\varrho\, \Omega(\eta^{(\varrho)}, (Y)_{\eta^{(\varrho)}})\, d\eta^{(\varrho)} = \sum_1^p {}^\varrho\, \Omega(\eta^{(\varrho)}, (Y)_{\eta^{(\varrho)}}) f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y, \eta^{(\varrho)})\, dx,$$

und da die Basis der rechts stehenden Summe eine rationale symmetrische Function von $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots \eta^{(p)}$ ist, indem $(Y)_{\eta^{(\varrho)}}$, wie oben gezeigt, rational von $\eta^{(\varrho)}$ abhängt, sich also der Gleichung (b) zufolge als rationale Function der Grössen $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrücken lässt, und das sich rechts ergebende Differential vermöge der für das links stehende angenommenen Eigenschaft auch eines erster Gattung sein muss, so folgt durch Integration

$$\text{(c)} \cdots \int^x F(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y)\, dx = \sum_1^p {}^\varrho \int^{\eta^{(\varrho)}} \Omega(s, Y)\, ds,$$

worin F eine rationale Function bedeutet, und rechts und links Integrale erster Gattung stehen; es ergiebt sich somit, *dass für jede Art von Abel'schen Integralen, die auf der rechten Seite von* (14) *in dem Ausdrucke z für das Integral der linearen Differentialgleichung vorkommen, die Summe eines jeden Systems von Integralen erster Gattung, deren Anzahl durch die den Integralen zukommende charakteristische Zahl p bestimmt wird, gleich einem Integrale erster Gattung ist*), dessen algebraische Irrationalität eine rationale Function von x und den Coefficienten der linearen Differentialgleichung ist, — deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung sind mit in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Coefficienten, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rational durch die resp. Grenzen und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind.*

Eine weitere Vereinfachung der Gleichung, welche die $\eta^{(\varrho)}$ zu Lösungen hat, lässt sich für jetzt — wir nehmen das Problem nachher wieder auf — im Allgemeinen nur noch in einem, freilich recht ausgedehnten Falle angeben, der eine besondere Wichtigkeit für die Quadraturen, also für den einfachsten Fall einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

hat, wie denn überhaupt alle bisherigen und noch weiter für lineare Differentialgleichungen zu entwickelnden Sätze als einfachste Fälle die analogen Sätze für die Integrale algebraischer Functionen in sich schliessen.

Es soll sich also im Folgenden um eine weitere Reduction der durch die Gleichung (c) ausgesprochenen Beziehung handeln, ohne dass specielle Reductionsfragen von Integralen, wie wir sie später behandeln werden, schon hier aufgeworfen werden. Mag also in dem Integrale (a) der vorgelegten linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein zu einer binomischen Irrationalität $\sqrt[n]{R_1(s)}$ gehöriges Integral vorkommen, worin

$$R_1(s) = (s - \alpha_1)^{n_1} (s - \alpha_2)^{n_2} \cdots (s - \alpha_\varrho)^{n_\varrho}$$

ist, und $n_1, n_2, \cdots n_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten, von denen wir annehmen dürfen, dass sie nicht sämmtlich mit n einen gemeinsamen Theiler haben, so haben, wie gerade für diesen Fall der algebraischen Irrationalität von Abel selbst in seiner berühmten Arbeit über das nach ihm benannte Additionstheorem näher ausgeführt wurde, sämmt-

---

*) wobei bemerkt werden muss, dass dieses auch identisch Null sein kann.

liche Fundamentalintegrale erster Gattung die Form

$$\int \frac{F_\lambda(s)\,ds}{\sqrt[n]{R_1(s)^\lambda}},$$

wenn λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \cdots n-1$, $F_\lambda(s)$ eine ganze Function von s bedeutet, und die Zahl der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung

$$p = \tfrac{1}{2}\{(n-1)(\varrho-1) - (\nu_0 - 1) - (\nu_1 - 1) - \cdots - (\nu_\varrho - 1)\}$$

ist, worin ν_0 den grössten gemeinsamen Theiler von n und $n_1 + n_2 + \cdots + n_\varrho$, ν_1 den von n und n_1, ν_2 den von n und n_2, $\cdots \nu_\varrho$ den von n und n_ϱ bezeichnet. Unter dieser Annahme wird die Gleichung (c) die Form haben

$$(15) \cdots \frac{F_\lambda(\eta_1)\,d\eta_1}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1)^\lambda}} + \frac{F_\lambda(\eta_2)\,d\eta_2}{\sqrt[n]{R_1(\eta_2)^\lambda}} + \cdots + \frac{F_\lambda(\eta_p)\,d\eta_p}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p)^\lambda}} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)\,dx,$$

worin die Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_p$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(16) \cdot \eta^p + f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)\eta^{p-1} + \cdots + f_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0$$

sind, wobei $f_1, f_2, \cdots f_p$ rationale Functionen bedeuten, und $\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho)}$ sich rational durch $\eta_\varrho, x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrücken lässt; die rechte Seite wird ebenfalls das Differential eines Abel'schen Integrales erster Gattung sein, und es soll hier, wie schon oben hervorgehoben worden, noch nicht die Frage erörtert werden, die wir später ausführlich behandeln, wann im Allgemeinen ein Integral der in der Differentialgleichung vorkommenden algebraischen Irrationalitäten auf niedere Integralgattungen führt, sondern wir wollen hier die durch die Gleichung (15) dargestellte Reductionsfrage zuerst nur für einen, wie nachher gezeigt werden soll, sehr wichtigen Fall behandeln, in dem die auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende algebraische Function ebenfalls zu einer binomischen Irrationalität und zwar mit demselben Exponenten n gehört, so dass, da die rechte Seite gleichfalls ein Integral erster Gattung sein musste,

$$(17) \cdots F(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y)\,dx = \frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)^2}} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)^{n-1}}}$$

sein wird. Dies wird also z. B. der Fall sein, wenn $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ rationale Functionen sind, während $y = \varphi\left(x, \sqrt{R(x)}\right)$ ist, worin φ

eine rationale Function bedeutet, oder auch, wenn $Y_1, Y_2 \cdots Y_{m-1}, y$ sämmtlich rationale Functionen von x und $\sqrt[n]{R(x)}$ sind. Da man nun in der Gleichung (15) die Grösse λ die Werthe $1, 2, \cdots n-1$ annehmen lassen kann, so wird, wenn wir von vornherein $\lambda = 1$ gesetzt denken, die Beziehung bestehen

$$(18) \cdots \frac{F_1(\eta_1)\,d\eta_1}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1)}} + \frac{F_1(\eta_2)\,d\eta_2}{\sqrt[n]{R_1(\eta_2)}} + \cdots + \frac{F_1(\eta_p)\,d\eta_p}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p)}}$$
$$= \frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)^2}} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)^{n-1}}},$$

in welcher die Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_p$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(19) \cdots \eta^p + \varphi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta^{p-1} + \cdots + \varphi_p\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right) = 0$$

sind, worin $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_p$ rationale Functionen bedeuten, und $\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho)}$ sich rational durch $\eta_\varrho, x, \sqrt[n]{R(x)}$ ausdrücken lässt. Beschreibt nun x um einen Nullpunkt von $R(x)$ einen solchen Umkreis, dass, wenn ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet, $\sqrt[n]{R(x)}$ in $\varepsilon\sqrt[n]{R(x)}$ übergeht, so ergiebt sich aus (18) die Gleichung

$$(20) \cdots \frac{F_1\left(\eta_1^{(1)}\right)d\eta_1^{(1)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_1^{(1)}\right)}} + \frac{F_1\left(\eta_2^{(1)}\right)d\eta_2^{(1)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_2^{(1)}\right)}} + \cdots + \frac{F_1\left(\eta_p^{(1)}\right)d\eta_p^{(1)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_p^{(1)}\right)}}$$
$$= \frac{f_1(x)\,dx}{\varepsilon\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x)\,dx}{\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2}} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{\varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{R(x)^{n-1}}},$$

bei einer nochmaligen Umkreisung

$$(21) \cdots \frac{F_1\left(\eta_1^{(2)}\right)d\eta_1^{(2)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_1^{(2)}\right)}} + \cdots + \frac{F_1\left(\eta_p^{(2)}\right)d\eta_p^{(2)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_p^{(2)}\right)}}$$
$$= \frac{f_1(x)\,dx}{\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x)\,dx}{\varepsilon^4\sqrt[n]{R(x)^2}} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)\,dx}{\varepsilon^{2(n-1)}\sqrt[n]{R(x)^{n-1}}}$$

u. s. w., endlich

$$(22) \cdots \frac{F_1\left(\eta_1^{(n-1)}\right)d\eta_1^{(n-1)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_1^{(n-1)}\right)}} + \cdots + \frac{F_1\left(\eta_p^{(n-1)}\right)d\eta_p^{(n-1)}}{\sqrt[n]{R_1\left(\eta_p^{(n-1)}\right)}}$$
$$= \frac{f_1(x)\,dx}{\varepsilon^{n-1}\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x)\,dx}{\varepsilon^{2(n-1)}\sqrt[n]{R(x)^2}} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)\,d}{\varepsilon^{(n-1)(n-1)}\sqrt[n]{J}}$$

worin $\eta_1^{(\alpha)}, \eta_2^{(\alpha)}, \cdots \eta_p^{(\alpha)}$ Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(23) \cdots \eta^{(\alpha)^p} + \varphi_1\left(x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}\right) \eta^{(\alpha)^{p-1}} + \cdots + \varphi_p\left(x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}\right) = 0$$

sind, wenn $\varphi_1, \cdots \varphi_p$ die der Gleichung (19) zugehörigen rationalen Functionen bedeuten, und $\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho^{(\alpha)})}$ sich stets durch eine vom Index α unabhängige rationale Function von $\eta_\varrho^{(\alpha)}, x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}$ ausdrücken lässt. Multiplicirt man nun die Gleichungen (18), (20), (21), $\cdots$ (22) resp. mit $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots \varepsilon^{n-1}$, und addirt alle diese Gleichungen, so folgt, da auf der rechten Seite die Summen der einzelnen Verticalreihen, wie unmittelbar zu sehen, mit Ausnahme der ersten verschwinden, dass

$$(24) \cdots \frac{n f_1(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)}} = \frac{F_1(\eta_1) d\eta_1}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1)}} + \frac{F_1(\eta_2) d\eta_2}{\sqrt[n]{R_1(\eta_2)}} + \cdots + \frac{F_1(\eta_p) d\eta_p}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p)}}$$
$$+ \frac{F_1(\eta_1^{(1)}) d\eta_1^{(1)}}{\varepsilon^{-1}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(1)})}} + \frac{F_1(\eta_2^{(1)}) d\eta_2^{(1)}}{\varepsilon^{-1}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(1)})}} + \cdots + \frac{F_1(\eta_p^{(1)}) d\eta_p^{(1)}}{\varepsilon^{-1}\sqrt[n]{R_1(\eta_p^{(1)})}}$$
$$+ \frac{F_1(\eta_1^{(2)}) d\eta_1^{(2)}}{\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(2)})}} + \frac{F_1(\eta_2^{(2)}) d\eta_2^{(2)}}{\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(2)})}} + \cdots + \frac{F_1(\eta_p^{(2)}) d\eta_p^{(2)}}{\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_p^{(2)})}}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{F_1(\eta_1^{(n-1)}) d\eta_1^{(n-1)}}{\varepsilon^{-(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(n-1)})}} + \frac{F_1(\eta_2^{(n-1)}) d\eta_2^{(n-1)}}{\varepsilon^{-(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(n-1)})}} + \cdots + \frac{F_1(\eta_p^{(n-1)}) d\eta_p^{(n-1)}}{\varepsilon^{-(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_p^{(n-1)})}}$$

sein muss, und durch Zusammenziehung der rechten Seite dieser Gleichung zu p gleichartigen Differentialen vermöge des Abel'schen Theorems wird sich die gesuchte Vereinfachung des oben ausgesprochenen Satzes ergeben, die wir später als einen ganz allgemein gültigen analytischen Satz wiederfinden werden. Nach dem Abel'schen Theorem ist bekanntlich mit der Gleichung

$$(25) \cdots\cdots Y^n = R_1(\eta)$$

die Gleichung

$$(26) \cdots\cdots q_0 + q_1 Y + q_2 Y^2 + \cdots + q_{n-1} Y^{n-1} = 0,$$

oder

$$(27) \cdots\cdots (a_0\eta^r + a_1\eta^{r-1} + \cdots) + (b_0\eta^s + b_1\eta^{s-1} + \cdots) Y$$
$$+ (c_0\eta^t + c_1\eta^{t-1} + \cdots) Y^2 + \cdots = 0$$

zu verbinden, worin die Anzahl der Constanten passend zu wählen ist, und es sind sodann in (27) für η und Y zur Bestimmung der Constanten alle auf der rechten Seite der Gleichung (24) vorkommenden Grössen η und die zugehörigen Irrationalitäten zu setzen, wobei

es wesentlich ist zu beachten, dass hier die Anwendung des Abel'schen Theorems nur dadurch möglich wird, dass $\varepsilon^{-\alpha}\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho^{(\alpha)})}$ auch wieder ein Werth der Irrationalität $\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho^{(\alpha)})}$ ist. Es ergeben sich somit die Bestimmungsgleichungen

$$(28) \cdot\cdot (a_0\eta_1^r + a_1\eta_1^{r-1} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_1^s + b_1\eta_1^{s-1} + \cdot\cdot)\sqrt[n]{R_1(\eta_1)} + (c_0\eta_1^t + c_1\eta_1^{t-1} + \cdot\cdot)\sqrt[n]{R_1(\eta_1)^2} + \cdot\cdot = 0,$$

$$(29) \cdot\cdot (a_0\eta_2^r + a_1\eta_2^{r-1} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_2^s + b_1\eta_2^{s-1} + \cdot\cdot)\sqrt[n]{R_1(\eta_2)} + (c_0\eta_2^t + c_1\eta_2^{t-1} + \cdot\cdot)\sqrt[n]{R_1(\eta_2)^2} + \cdot\cdot = 0,$$

. . . .

$$(30) \; (a_0\eta_1^{(1)^r} + a_1\eta_1^{(1)^{r-1}} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_1^{(1)^s} + b_1\eta_1^{(1)^{s-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-1}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(1)})} + (c_0\eta_1^{(1)^t} + c_1\eta_1^{(1)^{t-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(1)})^2} + \cdot\cdot = 0,$$

$$(31) \; (a_0\eta_2^{(1)^r} + a_1\eta_2^{(1)^{r-1}} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_2^{(1)^s} + b_1\eta_2^{(1)^{s-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-1}\sqrt[n]{R(\eta_2^{(1)})} + (c_0\eta_2^{(1)^t} + c_1\eta_2^{(1)^{t-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(1)})^2} + \cdot\cdot = 0,$$

. . . .

$$(32) \; (a_0\eta_1^{(2)^r} + a_1\eta_1^{(2)^{r-1}} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_1^{(2)^s} + b_1\eta_1^{(2)^{s-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(2)})} + (c_0\eta_1^{(2)^t} + c_1\eta_1^{(2)^{t-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-4}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(2)})^2} + \cdot\cdot = 0,$$

$$(33) \; (a_0\eta_2^{(2)^r} + a_1\eta_2^{(2)^{r-1}} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_2^{(2)^s} + b_1\eta_2^{(2)^{s-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-2}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(2)})} + (c_0\eta_2^{(2)^t} + c_1\eta_2^{(2)^{t-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-4}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(2)})^2} + \cdot\cdot = 0,$$

. . . .

$$(34) \cdot\cdot\cdot \; (a_0\eta_1^{(n-1)^r} + a_1\eta_1^{(n-1)^{r-1}} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_1^{(n-1)^s} + b_1\eta_1^{(n-1)^{s-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(n-1)})} + (c_0\eta_1^{(n-1)^t} + c_1\eta_1^{(n-1)^{t-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-2(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(n-1)})^2} + \cdot\cdot = 0,$$

$$(35) \cdot\cdot\cdot \; (a_0\eta_2^{(n-1)^r} + b_1\eta_2^{(n-1)^{r-1}} + \cdot\cdot) + (b_0\eta_2^{(n-1)^s} + b_1\eta_2^{(n-1)^{s-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(n-1)})} + (c_0\eta_2^{(n-1)^t} + c_1\eta_2^{(n-1)^{t-1}} + \cdot\cdot)\varepsilon^{-2(n-1)}\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(n-1)})^2} + \cdot\cdot = 0$$

. . . . ;

beachtet man nun, dass, wie oben gefunden worden, $\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho^{(\alpha)})}$ eine

rationale Function von $\eta_\varrho^{(\alpha)}$, x, $\varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}$ ist, so wird durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die eben hingeschriebenen Bestimmungsgleichungen sich das folgende System ergeben

$$(36)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{k_0} + \cdots\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{k_1} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ b_0\left[\psi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{l_0} + \cdots\right] + b_1\left[\psi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{l_1} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ c_0\left[\omega_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{m_0} + \cdots\right] + c_1\left[\omega_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{m_1} + \cdots\right] + \cdots = 0$$

$$(37)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{k_0} + \cdots\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{k_1} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ b_0\left[\psi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{l_0} + \cdots\right] + b_1\left[\psi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{l_1} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ c_0\left[\omega_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{m_0} + \cdots\right] + c_1\left[\omega_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{m_1} + \cdots\right] + \cdots = 0$$

$$(38)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{(1)^{k_0}} + \cdots\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{(1)^{k_1}} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_0\left[\psi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{(1)^{l_0}} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_1\left[\psi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{(1)^{l_1}} + \cdots\right]$$
$$+ \cdots + \varepsilon^{-2} c_0\left[\omega_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{(1)^{m_0}} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-2} c_1\left[\omega_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_1^{(1)^{m_1}} + \cdots\right] + \cdots = 0$$

$$(39)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{(1)^{k_0}} + \cdots\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{(1)^{k_1}} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_0\left[\psi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{(1)^{l_0}} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_1\left[\psi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{(1)^{l_1}} + \cdots\right]$$
$$+ \cdots + \varepsilon^{-2} c_0\left[\omega_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{(1)^{m_0}} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-2} c_1\left[\omega_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)\eta_2^{(1)^{m_1}} + \cdots\right] + \cdots = 0$$

. . . . ,

worin die Functionen $\varphi, \psi, \omega, \cdots$ rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind. Addirt man jetzt die ersten p Gleichungen (36), (37) und die zugehörigen, nachdem dieselben der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} 1 & 1 & & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots\cdots & \eta_p \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \cdots\cdots & \eta_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \eta_1^{p-1} & \eta_2^{p-1} & \cdots & \eta_p^{p-1} \end{matrix}$$

multiplicirt sind, so ergiebt sich, wenn man

$$\eta_1^r + \eta_2^r + \cdots + \eta_p^r = S_r$$

setzt und genau ebenso mit den anderen Gleichungssystemen (38), (39), $\cdots$ verfährt, das folgende System von Bestimmungsgleichungen für die in den Grössen q der Gleichung (26) enthaltenen Constanten

$$(40)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_0} + \cdot\cdot\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_1} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot$$
$$+ b_0\left[\psi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_0} + \cdot\cdot\right] + b_1\left[\psi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_1} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot$$
$$+ c_0\left[\omega_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_0} + \cdot\cdot\right] + c_1\left[\omega_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_1} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot = 0$$

$$(41)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_0+1} + \cdot\cdot\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_1+1} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot$$
$$+ b_0\left[\psi_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_0+1} + \cdot\cdot\right] + b_1\left[\psi_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_1+1} + \cdot\cdot\right]$$
$$+ \cdot\cdot + c_0\left[\omega_0\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_0+1} + \cdot\cdot\right]$$
$$+ c_1\left[\omega_1\left(x, \sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_1+1} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot = 0$$

. . . .

$$(42)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_0}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_1}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot$$
$$+ \varepsilon^{-1}b_0\left[\psi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_0}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + \varepsilon^{-1}b_1\left[\psi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_1}^{(1)} + \cdot\cdot\right]$$
$$+ \cdot\cdot + \varepsilon^{-2}c_0\left[\omega_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_0}^{(1)} + \cdot\cdot\right]$$
$$+ \varepsilon^{-2}c_1\left[\omega_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_1}^{(1)} + \cdot\cdot\right] = 0$$

$$(43)\quad a_0\left[\varphi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_0+1}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + a_1\left[\varphi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{k_1+1}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot$$
$$+ \varepsilon^{-1}b_0\left[\psi_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_0+1}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + \varepsilon^{-1}b_1\left[\psi_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{l_1+1}^{[1]} + \cdot\cdot\right]$$
$$+ \cdot\cdot + \varepsilon^{-2}c_0\left[\omega_0\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_0+1}^{(1)} + \cdot\cdot\right]$$
$$+ \varepsilon^{-2}c_1\left[\omega_1\left(x, \varepsilon\sqrt[n]{R(x)}\right)S_{m_1+1}^{(1)} + \cdot\cdot\right] + \cdot\cdot = 0$$

. . . .

Da aber die Potenzsummen $S^{(\alpha)}$ sich rational durch die Coefficienten der Gleichung (23), also rational durch x und $\varepsilon^\alpha\sqrt[n]{R(x)}$ ausdrücken lassen, so werden die letzten Gleichungen die Form annehmen

$$(44) \cdots a_0 \left[A_{00} + B_{00}\sqrt[n]{R(x)} + C_{00}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ a_1 \left[A_{10} + B_{10}\sqrt[n]{R(x)} + C_{10}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ b_0 \left[D_{00} + E_{00}\sqrt[n]{R(x)} + F_{00}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ b_1 \left[D_{10} + E_{10}\sqrt[n]{R(x)} + F_{10}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ c_0 \left[G_{00} + H_{00}\sqrt[n]{R(x)} + I_{00}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ c_1 \left[G_{10} + H_{10}\sqrt[n]{R(x)} + I_{10}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0$$

$$(45) \cdots a_0 \left[A_{01} + B_{01}\sqrt[n]{R(x)} + C_{01}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ a_1 \left[A_{11} + B_{11}\sqrt[n]{R(x)} + C_{11}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ b_0 \left[D_{01} + E_{01}\sqrt[n]{R(x)} + F_{01}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ b_1 \left[D_{11} + E_{11}\sqrt[n]{R(x)} + F_{11}\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0$$

. . . .

$$(46) \cdots a_0 \left[A_{00} + B_{00}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + C_{00}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ a_1 \left[A_{10} + B_{10}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + C_{10}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_0 \left[D_{00} + E_{00}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + F_{00}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_1 \left[D_{10} + E_{10}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + F_{10}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-2} c_0 \left[G_{00} + H_{00}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + I_{00}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-2} c_1 \left[G_{10} + H_{10}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + I_{10}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0$$

$$(47) \cdots a_0 \left[A_{01} + B_{01}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + C_{01}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ a_1 \left[A_{11} + B_{11}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + C_{11}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_0 \left[C_{01} + D_{01}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + E_{01}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-1} b_1 \left[C_{11} + D_{11}\,\varepsilon\sqrt[n]{R(x)} + E_{11}\,\varepsilon^2\sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots = 0$$

$$(48) \cdots\cdot a_0 \left[A_{00} + B_{00}\, \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + C_{00}\, \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ a_1 \left[A_{10} + B_{10}\, \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + C_{10}\, \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-2} b_0 \left[D_{00} + E_{00}\, \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + F_{00}\, \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-2} b_1 \left[D_{10} + E_{10}\, \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + F_{10}\, \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^{-4} c_0 \left[G_{00} + H_{00}\, \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + I_{00}\, \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right]$$
$$+ \varepsilon^{-4} c_1 \left[G_{10} + H_{10}\, \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + I_{10}\, \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \cdots\right] + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

worin die Grössen $A, B, C, \cdots$ sämmtlich rationale Functionen von x bedeuten.

Fasst man nunmehr die Gleichungen (44), (46), (48), $\cdots$ auf und addirt dieselben, so folgt, wie unmittelbar zu sehen

$$(49) \cdots\cdot A_{00} a_0 + A_{10} a_1 + \cdots + E_{00} \sqrt[n]{R(x)}\, b_0 +$$
$$+ E_{10} \sqrt[n]{R(x)}\, b_1 + \cdots + J_{00} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_0 + J_{10} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_1 + \cdots = 0;$$

multiplicirt man die Gleichungen (44), (46), (48), $\cdots$ resp. mit 1, ε^{-1}, $\varepsilon^{-2}, \cdots \varepsilon^{-(n-1)}$ und addirt dieselben, so folgt:

$$(50) \cdots\cdot B_{00} \sqrt[n]{R(x)}\, a_0 + B_{10} \sqrt[n]{R(x)}\, a_1 + \cdots + F_{00} \sqrt[n]{R(x)^2}\, b_0 +$$
$$F_{10} \sqrt[n]{R(x)^2}\, b_1 + \cdots + K_{00} \sqrt[n]{R(x)^3}\, c_0 + K_{10} \sqrt[n]{R(x)^3}\, c_1 + \cdots = 0;$$

multiplicirt man jene Gleichungen mit 1, ε^{-2}, $\varepsilon^{-4}, \cdots \varepsilon^{-2(n-1)}$ und addirt wiederum, so erhält man

$$(51) \cdots\cdot C_{00} \sqrt[n]{R(x)^2}\, a_0 + C_{10} \sqrt[n]{R(x)^2}\, a_1 + \cdots + \cdots = 0$$

u. s. w., und man sieht unmittelbar, dass die Gleichung (50) durch $\sqrt[n]{R(x)}$, die Gleichung (51) durch $\sqrt[n]{R(x)^2}$, etc. dividirbar ist, so dass sich für die Bestimmung der Coefficienten $a_0, a_1, \cdots b_0, b_1, \cdots c_0, c_1, \cdots$ die linearen Gleichungen ergeben

$$(52) \cdots\cdot \mathfrak{a}_{00} a_0 + \mathfrak{a}_{10} a_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{00} \sqrt[n]{R(x)}\, b_0 + \mathfrak{b}_{10} \sqrt[n]{R(x)}\, b_1 + \cdots$$
$$+ \mathfrak{c}_{00} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_0 + \mathfrak{c}_{10} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_1 + \cdots = 0$$

$$(53) \cdots\cdot \mathfrak{a}_{01} a_0 + \mathfrak{a}_{11} a_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{01} \sqrt[n]{R(x)}\, b_0 + \mathfrak{b}_{11} \sqrt[n]{R(x)}\, b_1 + \cdots$$
$$+ \mathfrak{c}_{01} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_0 + \mathfrak{c}_{11} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_1 + \cdots = 0$$

$$(54) \cdots\cdot \mathfrak{a}_{02} a_0 + \mathfrak{a}_{12} a_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{02} \sqrt[n]{R(x)}\, b_0 + \mathfrak{b}_{12} \sqrt[n]{R(x)}\, b_1 + \cdots$$
$$+ \mathfrak{c}_{02} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_0 + \mathfrak{c}_{12} \sqrt[n]{R(x)^2}\, c_1 + \cdots = 0$$

. . . .

in welchen wieder die Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots$ rationale Functionen von x bedeuten; hieraus folgt aber unmittelbar

$$a_0 = P_0, \quad a_1 = P_1, \cdots$$
$$b_0 = Q_0 \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}, \quad b_1 = Q_1 \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}, \cdots$$
$$c_0 = R_0 \sqrt[n]{R(x)^{n-2}}, \quad c_1 = R_1 \sqrt[n]{R(x)^{n-2}}, \cdots$$

u. s. w., worin $P_0, P_1, \cdots Q_0, Q_1 \cdots R_0, R_1, \cdots$ rationale Functionen von x sind. Gehen wir nunmehr wieder zu den Gleichungen (25) und (26) zurück, so ist bekanntlich nach Bestimmung der in den Functionen $q_0, q_1, q_2, \cdots$ vorkommenden Constanten die Grösse Y zwischen diesen beiden Gleichungen zu eliminiren; das Resultat der Elimination ist offenbar

$$(55) \cdots\cdot \left(q_0 + q_1 \sqrt[n]{R_1(\eta)} + q_2 \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \cdots\right) \times$$
$$\left(q_0 + q_1 \varepsilon \sqrt[n]{R_1(\eta)} + q_2 \varepsilon^2 \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \cdots\right) \cdots$$
$$\left(q_0 + q_1 \varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{R_1(\eta)} + q_2 \varepsilon^{2(n-1)} \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \cdots\right) = 0,$$

oder mit Berücksichtigung der oben für $a_0, b_0, c_0, \cdots a_1, b_1, c_1, \cdots$ gefundenen Werthe

$$(56) \Big\{ \left(P_0 \eta^r + P_1 \eta^{r-1} + \cdots\right) +$$
$$\left(Q_0 \eta^s + Q_1 \eta^{s-1} + \cdots\right) \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}\, \sqrt[n]{R_1(\eta)} +$$
$$\left(R_0 \eta^t + R_1 \eta^{t-1} + \cdots\right) \sqrt[n]{R(x)^{n-2}}\, \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \cdots \Big\} \times$$
$$\Big\{ \left(P_0 \eta^r + P_1 \eta^{r-1} + \cdots\right) +$$
$$\left(Q_0 \eta^s + Q_1 \eta^{s-1} \cdots\right) \varepsilon \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}\, \sqrt[n]{R_1(\eta)} +$$
$$\left(R_0 \eta^t + R_1 \eta^{t-1} + \cdots\right) \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^{n-2}}\, \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \cdots \Big\}$$

. . . .

oder endlich, wie unmittelbar zu sehen, mit Berücksichtigung des Grades der resultirenden Gleichung, wenn $(n+1)p = N$ gesetzt wird,

$$(57) \cdots\cdot \eta^N + \Omega_1(x) \eta^{N-1} + \Omega_2(x) \eta^{N-2} + \cdots + \Omega_{N-1}(x) \eta + \Omega_N(x) = 0,$$

worin $\Omega_1(x), \cdots \Omega_N(x)$ rationale Functionen von x sind. Bildet

man ferner das Product

$$(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \cdots (\eta - \eta_p)(\eta - \eta_1^{(1)}) \cdots (\eta - \eta_p^{(1)})$$
$$\cdots (\eta - \eta_1^{(n-1)}) \cdots (\eta - \eta_p^{(n-1)}),$$

so ist dieses nach der Definition der Grössen η vermöge (23) gleich

$$\prod_0^{n-1} {}_\alpha \left\{ \eta^p + \varphi_1\left(x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}\right) \eta^{p-1} + \cdots + \varphi_p\left(x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}\right) \right\},$$

also selbst wieder ein Polynom von der Form

$$(58) \cdots\cdots \eta^{N-p} + \Phi_1(x)\,\eta^{N-p-1} + \cdots + \Phi_{N-p}(x),$$

dessen Coefficienten rationale Functionen von x sind. Die np Integrale der rechten Seite der Gleichung (24) addiren sich nun aber zu p gleichartigen Integralen, deren obere Grenzen Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Polynom durch Division der Polynome (57) und (58) erhalten wird, die also wiederum Coefficienten besitzt, welche nur von x rational abhängen; ferner kann die Gleichung (26) vermöge der oben für die Grössen $a, b, c, \cdots$ gefundenen Werthe in die Form gesetzt werden

$$A + B \frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}} + C\left(\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}}\right)^2 + \cdots + M\left(\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}}\right)^{n-1} = 0,$$

in welcher $A, B, C, \cdots M$ rationale Functionen von η und x bedeuten, und aus welcher in Verbindung mit der Gleichung (25) oder mit

$$\left(\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}}\right)^n = \frac{R_1(\eta)}{R(x)}$$

für die der Gleichung (58) genügenden Werthe von η die zugehörigen Irrationalitäten Y zu berechnen sind; da nun aber hieraus sogleich zu ersehen, dass sich im Allgemeinen die Eliminationsgrösse $\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}}$ als rationale Function der Coefficienten der beiden eben hingeschriebenen Gleichungen d. h. als rationale Function von η und x ergeben wird, so folgt der Satz, *dass, wenn in dem Ausdrucke* (14) *für das Integral der linearen Differentialgleichung ein zu einer binomischen algebraischen Irrationalität $\sqrt[n]{R_1(H)}$ gehöriges Abel'sches Integral vorkommt, und die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x und einer binomischen algebraischen Irrationalität $\sqrt[n]{R(x)}$ sind, deren Wurzelexponent derselbe ist, stets zwischen den zugehörigen Integralen erster Gattung die Transformationsbeziehung bestehen wird*

$$(59) \cdots \frac{F_1(H_1)\,dH_1}{\sqrt[n]{R_1(H_1)}} + \frac{F_1(H_2)\,dH_2}{\sqrt[n]{R_1(H_2)}} + \cdots + \frac{F_1(H_p)\,dH_p}{\sqrt[n]{R_1(H_p)}} = \frac{n f_1(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)}},$$

in welcher H_1, H_2, $\cdots H_p$ die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind

$$(60) \cdots\cdot H^p + \omega_1(x)\,H^{p-1} + \omega_2(x)\,H^{p-2} + \cdots + \omega_p(x) = 0,$$

deren Coefficienten rational von x abhängen, während die diesen Werthen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten eine rationale Function dieser Lösungen und der Grösse x multiplicirt mit der Irrationalität $\sqrt[n]{R(x)}$ gleich sind.

Umgekehrt ist aber auch leicht zu sehen, dass, wenn H die Lösung einer algebraischen Gleichung (60) p^{ten} Grades mit in x rationalen Coefficienten bedeutet, und es ist

$$\frac{\sqrt[n]{R_1(H)}}{\sqrt[n]{R(x)}} = F(x, H)$$

für jede Lösung H jener Gleichung p^{ten} Grades, worin F eine rationale Function bedeutet, dann durch Differentiation der Gleichung (60)

$$dH = f(x, H)\,dx$$

sich ergiebt, worin f ebenfalls rational ist, und daher

$$\frac{F_1(H)\,dH}{\sqrt[n]{R_1(H)}} = \frac{F_1(H)\,f(x, H)\,dx}{F(x, H)\sqrt[n]{R(x)}};$$

setzt man auf beiden Seiten dieser Gleichung für H die p Lösungen der Gleichung (60) ein und addirt die Resultate, so erhält man

$$\sum_1^p{}_\alpha \frac{F_1(H_\alpha)\,dH_\alpha}{\sqrt[n]{R_1(H_\alpha)}} = \sum_1^p{}_\alpha \frac{F_1(H_\alpha)\,f(x, H_\alpha)}{F(x, H_\alpha)} \frac{dx}{\sqrt[n]{R(x)}},$$

und da auf der rechten Seite $\dfrac{dx}{\sqrt[n]{R(x)}}$ vor die Summe gesetzt und die übrig bleibende Summe, als rationale symmetrische Function der Lösungen der Gleichung (60) betrachtet, rational durch die Coefficienten derselben also durch x ausgedrückt werden kann, so folgt eine Gleichung von der Form

$$\frac{F_1(H_1)\,dH_1}{\sqrt[n]{R_1(H_1)}} + \frac{F_1(H_2)\,dH_2}{\sqrt[n]{R_1(H_2)}} + \cdots + \frac{F_1(H_p)\,dH_p}{\sqrt[n]{R_1(H_p)}} = \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt[n]{R(x)}},$$

welche der Beziehung (59) analog ist.*)

*) Es mag bemerkt werden, dass der obige Satz einfacher hätte eingesehen werden können, wenn man unmittelbar von der Symmetrie der rechten Seite der Gleichung (24) in Bezug auf die n Werthe von $\sqrt[n]{R(x)}$ ausgegangen wäre, doch sollte an dieser Stelle des Folgenden wegen die Methode der Herstellung der Gleichung (60) angegeben werden.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes wird, wie schon oben hervorgehoben worden, später gegeben werden, wenn erst die Natur der auf einander transformirbaren algebraischen Irrationalitäten, welche im gegebenen Integrale der Differentialgleichung sowie in den Coefficienten derselben vorkommen, näher erforscht sein wird.

§ 12.

Anwendung der Reductionsformeln auf die Behandlung der Frage von der Zurückführbarkeit hyperelliptischer Integrale auf elliptische und hyperelliptische niederer Ordnung.

Um eine Anwendung des im vorigen § bewiesenen Satzes zu geben, wollen wir denselben zuerst zur Untersuchung der Frage benutzen, wann die Differentialgleichung

$$(61) \cdots \quad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ und y rationale Functionen von x und $\sqrt{R(x)}$ sind, und $R(x)$ ein ganzes Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ Grades von x bedeutet, ein Integral von der Form

$$(62) \cdots \quad z = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_\varkappa \log v_\varkappa$$
$$+ \int^{\xi_1} y_1 ds + \int^{\xi_2} y_2 ds + \cdots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda ds$$

haben kann, *in welchem auch elliptische Integrale vorkommen sollen* — für den einfachen Fall der Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ die Frage von der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{(x^2-1)(8x^3-6x-1)} \frac{dz}{dx} = \frac{-4x^4+9x^2-x-1}{[(x^2-1)(8x^3-6x-1)]^{\frac{3}{2}}}$$

durch das elliptische Integral befriedigt

$$z = \frac{1}{3} \int^{\eta} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(2s+1)}},$$

in welchem

$$\eta = 4x^3 - 3x$$

ist.

Es war im vorigen § gezeigt worden, dass, wenn die Gleichung (61) ein Integral von der Form (62) hat, nothwendig, wenn das in (62) der Voraussetzung nach vorkommende elliptische Integral durch

$$\int^{\xi} f\left(s, \sqrt{\varphi(s)}\right) ds$$

bezeichnet wird, worin f eine rationale Function und

$$\varphi(s) = s(1 - s)(1 - c^2 s)$$

ist, jedenfalls, weil in Gleichung (59) $p = 1$ und $F_1(H) = 1$ zu setzen ist, auch

$$(63) \cdots \frac{dH}{\sqrt{\varphi(H)}} = \frac{2f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

sein muss, worin H nach Gleichung (60) eine *rationale* Function von x, $\sqrt{\varphi(H)}$ sich durch eine rationale Function von x multiplicirt mit $\sqrt{R(x)}$ ausdrücken lässt, und das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende hyperelliptische Differential eines erster Gattung ist; die Frage ist somit darauf zurückgeführt, die Bedingungen für die in den Coefficienten der Differentialgleichung $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ vorkommende Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ zu untersuchen, für welche ein zu ihr gehöriges Integral erster Gattung auf ein elliptisches Integral erster Gattung reducirbar ist, *wobei die Transformation, wie oben gefunden, stets eine rationale sein wird.*

Suchen wir zuerst Eigenschaften der rationalen Transformation festzustellen, welche das elliptische Integral erster Gattung

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-c^2y)}}$$

in ein hyperelliptisches verwandelt. Sei dieselbe

$$(64) \cdots y = \frac{U}{V} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n},$$

so folgt

$$(65) \cdots \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-c^2y)}} = \int \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{\sqrt{UV(V-U)(V-c^2U)}};$$

setzt man voraus, dass U und V nicht gemeinsame Factoren besitzen, so werden nicht zwei der Factoren

$$U,\ V,\ V-U,\ V-c^2U$$

dieselbe Lösung haben können, ausserdem ist bekanntlich jede doppelte Lösung des Polynoms unter der Quadratwurzel ein Theiler des Zählers, da

$$(V - \lambda U)\frac{dU}{dx} - U\frac{d(V-\lambda U)}{dx} = V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$$

ist, und machen wir nun die Voraussetzung, dass $m > n$, so wird der Grad des Radicanden $3m + n$ sein, so dass, wenn das durch die Transformation zu erhaltende hyperelliptische Integral erster Gattung, welches zu einem Polynome $R(x)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade gehören mag, eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades $(\varkappa < p)$ im Zähler haben soll, weil $V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$ vom $m + n - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, das Polynom unter

der Quadratwurzel $m+n-1-\varkappa$ Doppelfactoren besitzen muss, und sich somit die Beziehung ergiebt

$$2(m+n-1-\varkappa)+2p+1=3m+n$$

oder

$$m=n+2(p-\varkappa)-1,$$

welche zwischen dem Grade des Zählers und Nenners der Transformation besteht, wenn der Grad der ganzen Function von x, welche den Zähler der Function unter dem hyperelliptischen Integrale erster Gattung bildet, der $\varkappa^{\text{te}}$ sein soll.

Erwägt man nun andererseits, dass das Polynom unter der Quadratwurzel der rechten Seite der Gleichung (65) die willkürlichen Constanten

$$a_0, a_1, \cdots a_m, b_1, b_2, \cdots b_n \text{ und } c^2$$

enthält, deren Anzahl

$$m+n+2=2n+2(p-\varkappa)+1$$

ist, und dass die Festsetzung, dass dieses Polynom

$$m+n-1-\varkappa=2n+2p-3\varkappa-2$$

Doppelfactoren besitzen soll, bekanntlich die willkürlichen Constanten eben sovielen Bedingungsgleichungen unterwirft, so sieht man unmittelbar ein, *dass noch $\varkappa+3$ Constanten willkürlich bleiben.*

Für den Fall dass $m<n$, liefern genau dieselben Betrachtungen dasselbe Resultat, während sich $n=m+2(p-\varkappa)-1$ ergiebt. Ist endlich $m=n$, so wäre das Polynom unter der Quadratwurzel im Allgemeinen vom $4m^{\text{ten}}$ Grade, und da dasselbe durch Herausnehmen von Doppelfactoren immer nur wieder ein Polynom paaren Grades werden könnte, so muss, wenn jene Transformation das oben Verlangte leisten soll, unter λ eine der Zahlen 1 oder c^2 verstanden, eine Reihe von Beziehungen der Form bestehen

$$b_m=\lambda a_m,\ b_{m-1}=\lambda a_{m-1}, \cdots b_h=\lambda a_h,$$

so dass der Grad des Polynoms unter der Quadratwurzel der $3m+h-1^{\text{te}}$ wird; bemerkt man ferner, dass sich der Grad von $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$, wie unmittelbar zu sehen, auf den $m+h-2^{\text{ten}}$ reducirt, so folgt wiederum die Beziehung

$$2(m+h-2-\varkappa)+2p+1=3m+h-1,$$

oder

$$m=h+2(p-\varkappa)-2.$$

Da nun aber in diesem Falle die Anzahl der willkürlichen Constanten $m+h+1$ ist, und die Anzahl von $m+h-2-\varkappa$ Doppelfactoren ebensoviel Bedingungen zwischen den Constanten nach sich zieht, so bleiben wiederum, stets abgesehen von den mehrfachen

Werthecomplexen der aus den Bedingungsgleichungen folgenden Constanten, $\varkappa + 3$ willkürliche Constanten übrig, somit in allen Fällen dieselbe Anzahl.

*Es giebt somit zu jedem Geschlechte p und zu jedem Grade $\varkappa$**) *ein hyperelliptisches Integral erster Gattung, welches auf ein elliptisches zurückführbar ist, und zwar enthält dieses unabhängig von dem Grade der Transformation noch $\varkappa + 3$ willkürliche Constanten.*

Da die Anzahl $\varkappa + 3$ der willkürlich gebliebenen Constanten grösser wird mit wachsendem Grade des Zählers der Function unter dem hyperelliptischen Integrale erster Gattung, so kann schon hieraus geschlossen werden, *dass, wenn ein hyperelliptisches Integral erster Gattung auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, nicht jedes zu derselben Irrationalität gehörige hyperelliptische Integral erster Gattung ebenfalls auf ein elliptisches Integral muss reducirt werden können.*

Es ist aber nun eine weitere und wichtigere Frage zu erörtern, nämlich *ob zu jedem Geschlechte p auch wirklich immer eine solche Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ gehört, dass alle zu dieser gehörigen hyperelliptischen Integrale auf elliptische reducirbar sind,* und das zur Untersuchung dieser Frage angewandte Princip wird uns zugleich zur wirklichen Herstellung reducirbarer Integrale führen.

Um für die Untersuchung dieser Frage die grösste Anzahl verwendbarer Constanten zu haben, müssen wir für $\varkappa$ die grösstmögliche Zahl d. h. $p - 1$ wählen, in welchem Falle, da für $m > n$ $m = n + 2(p - \varkappa) - 1$ war, $m = n + 1$ sein wird; nehmen wir nun die zum niedrigsten Grade gehörige Transformation, welche zugleich vermöge der oben aufgestellten Bedingungsgleichungen für den Integralmodul c^2 mehrere Werthe liefert — wir werden sehen, dass diese kleinste Transformationszahl in der That p Werthe für den Integralmodul liefert, also p selbständige elliptische Integrale — so wird, weil $3m + n > 2p + 1$ sein muss, $4n + 3 > 2p + 1$ oder $n > \frac{p-1}{2}$ folgen, und somit, da n den kleinsten Werth haben soll,

$$\text{für } p = 2\pi \qquad n = \pi$$
$$\text{für } p = 2\pi + 1 \qquad n = \pi + 1$$

sein. Ist I. $n = \pi$, also $m = \pi + 1$, so ist der Grad von

$$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$$

der $2\pi^{\text{te}}$, der Grad von $UV(V - U)$ der $3\pi + 2^{\text{te}}$, so dass, wenn

*) Der Grad $\varkappa$ eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung soll durch den Grad des Zählers der Function unter dem Integral definirt sein.

wir c^2 der Bedingung unterwerfen, dass $V - c^2 U$ einen und nur einen Doppelfactor besitze, die gleich Null gesetzte Discriminante, welche in c^2 bekanntlich vom $2\pi = p^{\text{ten}}$ Grade sein wird, p Werthe für c^2 liefert, während der Zähler des Differentials vom $2\pi - 1 = p - 1^{\text{ten}}$ Grade, und das Polynom unter der Wurzel vom Grade $3\pi + 2 + \pi - 1 = 4\pi + 1 = 2p + 1$ ist, wie es sein soll.

Ist dagegen II. $n = \pi + 1$, also $m = \pi + 2$, so wird der Grad des Zählers des transformirten Differentials der $2\pi + 2^{\text{te}}$; werden nun die Constanten der Transformation der Bedingung unterworfen, dass einer der Factoren des Polynoms $UV(V - U)$, also z. B. $V - U$ *einen* Doppelfactor besitzt, wird ferner c^2 so bestimmt, dass auch $V - c^2 U$ eine doppelte Lösung zukommt, wofür sich aus der Discriminante, wenn man von dem einen bei der eben getroffenen Festsetzung bereits benutzten Werthe $c^2 = 1$ absieht, $2(\pi + 1) - 1 = p$ Werthe ergeben, so wird der Zähler wieder den Grad $2\pi = p - 1$ und das Polynom unter der Quadratwurzel den Grad $4\pi + 3 = 2p + 1$ annehmen. Bezeichnet man somit in beiden Fällen die p in Betracht kommenden Lösungen der Discriminante mit $c_1^2, c_2^2, \cdots c_p^2$, so erhält man, wenn man beachtet, dass die Verschiedenheit der Polynome unter der Wurzel nur vom Factor $V - c^2 U$ herrührt, die folgenden Beziehungsgleichungen:

I. für den Fall, dass p eine gerade Zahl ist,

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_1^2\eta^2)}} = \\
&= \int \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \cdots + \nu_1 x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\left(x-\lambda_{\frac{3p}{2}+2}\right)(x-\mu_1)\cdots\left(x-\mu_{\frac{p}{2}-1}\right)}} \\
&\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_2^2\eta)}} = \\
&= \int \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \nu_2 x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\left(x-\lambda_{\frac{3p}{2}+2}\right)(x-\varrho_1)\cdots\left(x-\varrho_{\frac{p}{2}-1}\right)}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_p^2\eta)}} = \\
&= \int \frac{(\alpha_p + \beta_p x + \gamma_p x^2 + \cdots + \nu_p x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\left(x-\lambda_{\frac{3p}{2}+2}\right)(x-\sigma_1)\cdots\left(x-\sigma_{\frac{p}{2}-1}\right)}}
\end{aligned}\right.$$

für die Substitution

$$(67) \cdots\cdots \eta = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{\frac{p}{2}+1} x^{\frac{p}{2}+1}}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}}},$$

worin sämmtliche $p + 2$ Constanten $a_0, a_1, \cdots b_0, b_1, \cdots$ willkürlich geblieben,

II. wenn p eine ungerade Zahl,

$$(68) \begin{cases} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_1^2\eta)}} = \\ = \int \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \cdots + \nu_1 x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\left(x-\lambda_{\frac{3p+3}{2}}\right)(x-\mu_1)\cdots\left(x-\mu_{\frac{p-1}{2}}\right)}} \\ \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_2^2\eta)}} = \\ = \int \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \nu_2 x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\left(x-\lambda_{\frac{3p+3}{2}}\right)(x-\varrho_1)\cdots\left(x-\varrho_{\frac{p-1}{2}}\right)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_p^2\eta)}} = \\ = \int \frac{(\alpha_p + \beta_p x + \gamma_p x^2 + \cdots + \nu_p x^{p-1})\,dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\left(x-\lambda_{\frac{3p+3}{2}}\right)(x-\sigma_1)\cdots\left(x-\sigma_{\frac{p-1}{2}}\right)}} \end{cases}$$

für die Substitution

$$(69) \cdots\cdots \eta = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{\frac{p+3}{2}} x^{\frac{p+3}{2}}}{1 + b_1 x + \cdots + b_{\frac{p+1}{2}} x^{\frac{p+1}{2}}},$$

in welcher zwischen den $p + 3$ Constanten $a_0, a_1, \cdots b_0, b_1, \cdots$ nur *eine* Bedingungsgleichung besteht, also wieder $p + 2$ derselben willkürlich bleiben.

Will man nun für den Fall, dass p eine gerade Zahl ist, in den Gleichungen (66) überall dieselbe Irrationalität des hyperelliptischen Integrales erhalten, so wird man die willkürlich gebliebenen $p + 2$ Constanten a und b so bestimmen müssen, dass $\mu_q = \varrho_q = \cdots = \sigma_q$ wird für $q = 1, 2, \cdots \frac{p}{2} - 1$; da aber die Anzahl der Integrale

p ist, so wird für ein gerades p $\left(\frac{p}{2}-1\right)(p-1) \leqq p+2$ sein müssen, d. h. p nur gleich 2 oder 4 sein können, wenn Gleichheit der Polynome stattfinden soll, und es werden für $p=2$, also $2p+1=5$ noch 4 Constanten, für $p=4$, also $2p+1=9$ noch 3 Constanten willkürlich bleiben. Betrachten wir dagegen den Fall, dass p eine ungerade Zahl ist, so wird $(p-1)\frac{p-1}{2} \leqq p+2$, d. h. p nur gleich 1 oder 3 sein können, und es werden für $p=1$, also $2p+1=3$ noch 3 Constanten — der Transformationstheorie der elliptischen Integrale entsprechend — für $p=3$, also $2p+1=7$ ebenfalls noch 3 Constanten willkürlich bleiben, und dieselben Resultate ergeben sich für $m<n$. Wir erhalten somit den Satz, *dass im Allgemeinen nur für elliptische Integrale und hyperelliptische Integrale erster, zweiter und dritter Ordnung soviel Integrale erster Gattung, als das Geschlecht anzeigt, existiren, welche zu gleicher Zeit auf je ein elliptisches Integral reducirbar sind, oder für welche sämmtliche Fundamentalintegrale erster Gattung durch eine Summe elliptischer Integrale darstellbar sind, deren Anzahl dem Geschlechte des hyperelliptischen Integrales gleich ist,* indem die oben gebrauchte Transformation niedrigsten Grades offenbar die geringste Anzahl von Factoren unter der Quadratwurzel liefert, welche von den verschiedenen Werthen des Integralmoduls abhängen.

Wenden wir die eben gemachten Auseinandersetzungen auf den Fall $p=2$ an, üben also auf das Integral

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c^2\eta)}}$$

die rationale Transformation zweiten Grades*) (wir wählen hier $m<n$)

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

aus, so folgt

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c^2\eta)}} =$$

$$\frac{(-a_1 b_2 x^2 - 2a_0 b_2 x + a_1 - a_0 b_1)\,dx}{\sqrt{(a_0+a_1 x)(1+b_1 x+b_2 x^2)\left(1-a_0+(b_1-a_1)x+b_2 x^2\right)\left(1-c^2a_0+(b_1-c^2a_0)x+b_2x^2\right)}},$$

und wenn wir die Constante c^2 der Bedingung unterwerfen, dass

$$1 - c^2 a_0 + (b_1 - c^2 a_1)x + b_2 x^2$$

*) Dass eine Transformation ersten Grades nicht ein elliptisches Integral in ein hyperelliptisches überführen kann, ist unmittelbar einleuchtend.

zwei gleiche Factoren haben soll, oder dass c^2 der Gleichung genügt

$$(A) \cdots\cdot (b_1 - c^2 a_1)^2 - 4 b_2 (1 - c^2 a_0) = 0,$$

so wird der Factor

$$\sqrt{b_2}\left(x - \frac{c^2 a_1 - b_1}{2 b_2}\right)$$

vor die Quadratwurzel treten und für jeden der beiden aus (A) sich ergebenden Werthe von c^2 im Zähler enthalten sein.

Nennen wir die beiden Lösungen von (A) $c_1{}^2$ und $c_2{}^2$, so werden sich für dieselbe Substitution die beiden Gleichungen ergeben

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_1{}^2\eta)}} = \frac{-a_1\sqrt{b_2}\left(x - \frac{c_2{}^2 a_1 - b_1}{2b_2}\right)dx}{\sqrt{(a_0 + a_1 x)(1 + b_1 x + b_2 x^2)\left(1 - a_0 + (b_1 - a_1)x + b_2 x^2\right)}}$$

und

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_2{}^2\eta)}} = \frac{-a_1\sqrt{b_2}\left(x - \frac{c_1{}^2 a_1 - b_1}{2b_2}\right)dx}{\sqrt{(a_0 + a_1 x)(1 + b_1 x + b_2 x^2)\left(1 - a_0 + (b_1 - a_1)x + b_2 x^2\right)}},$$

und somit zwei verschiedene Integrale erster Gattung, welche zu derselben Irrationalität gehören, auf je *ein* elliptisches Integral zurückführbar sein und zwar durch ein und dieselbe Substitution niedrigsten, hier des zweiten Grades. Bringen wir zur Vereinfachung dieser Beziehung das hyperelliptische Integral erster Ordnung auf seine Normalform, indem wir die 4 willkürlich gebliebenen Constanten so bestimmen, dass das Polynom die Lösungen 0 und 1 annimmt, also

$$a_0 = 0, \quad 1 + b_1 - a_1 + b_2 = 0$$

ist, und führen statt der beiden noch übrig bleibenden willkürlichen Constanten die Grössen $\varkappa$ und λ durch die Beziehungen ein

$$1 - \frac{b_1}{\varkappa} + \frac{b_2}{\varkappa^2} = 0, \quad 1 - \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2}{\lambda^2} = 0,$$

so folgt leicht

$$b_1 = \varkappa + \lambda, \quad b_2 = \varkappa\lambda, \quad a_1 = (1 + \varkappa)(1 + \lambda), \quad a_0 = 0,$$

und aus der Gleichung (A) die beiden Werthe

$$c_1{}^2 = \frac{(\sqrt{\varkappa} + \sqrt{\lambda})^2}{(1 + \varkappa)(1 + \lambda)}, \quad c_2{}^2 = \frac{(\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda})^2}{(1 + \varkappa)(1 + \lambda)},$$

so dass die oben aufgestellten Beziehungen zwischen den beiden verschiedenen hyperelliptischen Integralen erster Ordnung und den elliptischen Integralen mit Berücksichtigung des Zeichens die Form annehmen

$$\int_0^x \frac{(x\sqrt{\varkappa\lambda}+1)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)(1-\varkappa\lambda x)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}\int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)\left(1-\frac{(\sqrt{\varkappa}+\sqrt{\lambda})^2}{(1+\varkappa)(1+\lambda)}\cdot\eta\right)}}$$

und

$$\int_0^x \frac{(x\sqrt{\varkappa\lambda}-1)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)(1-\varkappa\lambda x)}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa)(1+\lambda)}}\int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)\left(1-\frac{(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda})^2}{(1+\varkappa)(1+\lambda)}\,\eta\right)}},$$

und zwar vermöge derselben Transformation

$$\eta = \frac{(1+\varkappa)(1+\lambda)\,x}{(1+\varkappa x)(1+\lambda x)};$$

würde man die Transformation zweiten Grades, für welche $m > n$ ist, anwenden, also

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x},$$

so würde man auf das hyperelliptische Integral

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}\right)}}$$

geführt werden, welches ebenfalls auf elliptische Integrale reducirbar ist und sich von dem obigen nicht wesentlich unterscheidet; es sind dies die bekannten Jacobi'schen Integrale.

Wendet man auf das elliptische Integral nicht die Transformation niedrigsten, also zweiten Grades, sondern z. B. die dritten Grades an, so folgt, wenn man das elliptische Integral in der Form

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-\alpha_1)(\eta-\alpha_2)(\eta-\alpha_3)}}$$

zu Grunde legt und darauf die Substitution

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

anwendet,

$$(\mathrm{m})\quad \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-\alpha_1)(\eta-\alpha_2)(\eta-\alpha_3)}}$$

$$=\frac{(b_0+b_1x+b_2x^2)(a_1+2a_2x+3x^2)-(a_0+a_1x+a_2x^2+x^3)(b_1+2b_2x)}{\sqrt{\begin{array}{l}(b_0+b_1x+b_2x^2)\left(x^3+(a_2-\alpha_1b_2)x^2+(a_1-\alpha_1b_1)x+(a_0-\alpha_1b_0)\right)\\ \left(x^3+(a_2-\alpha_2b_2)x^2+(a_1-\alpha_2b_1)x+(a_0-\alpha_2b_0)\right)\\ \left(x^3+(a_2-\alpha_3b_2)x^2+(a_1-\alpha_3b_1)x+(a_0-\alpha_3b_0)\right)\end{array}}},$$

und es sind nun die Constanten so zu bestimmen, dass unter der Quadratwurzel der rechten Seite, nach Absonderung der Doppelfactoren, nur ein Polynom 5ten Grades übrig bleibt. Nehmen wir zuerst $b_2=b_1=0$, $b_0=1$, und bestimmen die Constanten a_0, a_1, a_2, α_1, α_2, α_3 so, dass, wenn $a_0-\alpha_1=A$, $a_0-\alpha_2=B$, $a_0-\alpha_3=C$ gesetzt wird, die Factoren

$$x^3+a_2x^2+a_1x+A \quad \text{und} \quad x^3+a_2x^2+a_1x+B$$

je zwei gleiche Lösungen haben, so wird nach Absonderung der Doppelfactoren das Polynom unter der Quadratwurzel offenbar vom 5ten Grade sein; die Forderung der gleichen Lösungen liefert aber bekanntlich, wenn

$$2(3a_1-a_2^2)=P,\quad 9A-a_1a_2=Q,\quad 9B-a_1a_2=R$$

gesetzt wird, die Bedingungen

$$3Q^2-2a_2PQ+P^2a_1=0,\quad 3R^2-2a_2PR+P^2a_1=0,$$

welche wiederum die beiden Beziehungen

$$3(Q+R)=2a_2P \quad \text{und} \quad P^2a_1=3QR$$

nach sich ziehen. Mit Hülfe dieser Bedingungen ergiebt sich leicht das nach Abtrennung der Doppelfactoren unter der Quadratwurzel übrig bleibende Polynom in der Form

$$x^5+\frac{5}{3}a_2x^4+\frac{1}{3}(a_2^2+7a_1)x^3+\left(-\frac{a_2^3}{3}+2a_1a_2+C\right)x^2$$
$$+\left(-\frac{a_1a_2^2}{3}+\frac{4}{3}a_1^2+\frac{2}{3}a_2C\right)x+C\left(-\frac{a_2^2}{3}+\frac{4}{3}a_1\right),$$

während das Product der Doppelfactoren gegen den Zähler des Differentialausdruckes fortfällt, und man erhält

$$\frac{1}{3}\int\frac{d\eta}{(\eta-\alpha_1)(\eta-\alpha_2)(\eta-\alpha_3)}=$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^5+\frac{5}{3}a_2x^4+\frac{1}{3}(a_2+7a_1)x^3+\left(-\frac{a_2^3}{3}+2a_1a_2+C\right)x^2+\left(-\frac{a_1a_2^2}{3}+\frac{4}{3}a_1^2+\frac{2}{3}a_2C\right)x+C\left(-\frac{a_2^2}{3}+\frac{4}{3}a_1\right)}},$$

worin a_1, a_2, C drei willkürliche Constanten bedeuten, während α_1, α_2, (aus den oben angegebenen Beziehungen zwischen A, B, C, P, Q, . und den beiden Bedingungsgleichungen, denen P, Q, R genüge mussten, hervorgehen. Setzt man zur Vereinfachung, um auf ei von Hermite*) gegebenes Integral zu kommen,

$$a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{3}{4}a, \quad C = -\frac{b}{8},$$

so folgt

$$\frac{1}{3}\int\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-\alpha_1)(\eta-\alpha_2)(\eta-\alpha_3)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a)\left(x^3-\frac{3}{4}ax-\frac{b}{8}\right)}}$$

vermöge der Substitution

$$\eta = x^3 - \frac{3}{4}ax + a_0,$$

worin noch a_0 beliebig ist. Da ferner

$$a_0 - \alpha_1 = A, \quad a_0 - \alpha_2 = B, \quad a_0 - \alpha_3 = C$$

war, so folgt, wenn ausserdem noch $a_0 = 0$ gesetzt wird,

$$\alpha_3 = -C = \frac{b}{8},$$

und es ergiebt sich aus den Definitionsgleichungen von P, Q, R

$$P = -\frac{9}{2}a, \quad Q = 9A, \quad R = 9B,$$

und mit Hülfe der für diese Grössen aufgestellten Bedingung: gleichungen

$$Q = \frac{9}{4}a^{\frac{3}{2}}, \quad R = -\frac{9}{4}a^{\frac{3}{2}}, \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}, \quad B = -\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}},$$

so dass $\alpha_1 = -\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}$ folgt. Es nimmt somit das elliptiscl Integral die Form an

$$\frac{1}{3}\int\frac{d\eta}{\sqrt{\left(\eta^2-\frac{1}{16}a^3\right)\left(\eta+\frac{b}{8}\right)}},$$

und man erhält, wenn $\frac{a}{4}\eta$ statt η gesetzt wird, die gesuchte B(ziehung

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a)(8x^3-6ax-b)}} = \frac{1}{3}\int\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta^2-a)(2a\eta+b)}}$$

vermöge der Substitution

$$\eta = \frac{4x^3-3ax}{a}.$$

*) Annales de la société scientifique de Bruxelles (1[re] année 1876).

Gehen wir wieder zur Gleichung (m) zurück und machen nicht die oben für die Grössen b_0, b_1, b_2 gemachte Annahme, sondern bestimmen die Constanten so, dass die drei Polynome

$$x^3 + (a_2 - \alpha_\varrho b_2)x^2 + (a_1 - \alpha_\varrho b_1)x + (a_0 - \alpha_\varrho b_0)$$

für $\varrho = 1, 2, 3$ je einen Doppelfactor besitzen, so wird wieder nach Absonderung derselben das Polynom unter der Quadratwurzel vom 5ten Grade sein und jedenfalls als quadratischen Factor den Nenner der Substitution $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ enthalten; man erhält dann, wenn man genau wie oben verfährt und die willkürlich bleibenden Constanten, wie dies eben geschehen, passend bestimmt, die Beziehung

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 - a)(8x^3 - 6ax - b)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^3 - 3a\eta + b}}$$

vermöge der Substitution

$$\eta = \frac{2x^3 - b}{3(x^2 - a)}.$$

Damit ist nun die Aufgabe, hyperelliptische Integrale anzugeben, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, erledigt, aber eine wesentlich andere Frage ist die, bei einem speciell vorgelegten hyperelliptischen Integrale zu entscheiden, ob dasselbe auf elliptische Integrale reducirbar ist, oder, mit Bezug auf die obige das Integral linearer Differentialgleichungen betreffende Untersuchung, für die in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommenden algebraischen Irrationalitäten zu entscheiden, ob in dem Ausdrucke für das Integral der Differentialgleichung auch elliptische Integrale enthalten sein können. Die Entscheidung dieser Frage hängt mit den Eigenschaften der Perioden des hyperelliptischen Systems zusammen oder mit der Beschaffenheit der diesem Systeme angehörigen ϑ-Functionen. Ich werde im Folgenden die Grundzüge der Transformationstheorie der ϑ-Functionen, welche einem hyperelliptischen Systeme erster Ordnung angehören, als bekannt voraussetzen*) und ebenso den aus der Definition des Transformationsproblems hyperelliptischer Systeme folgenden Satz, dass, wenn die beiden hyperelliptischen Integrale des Systems auf elliptische Integrale reducirbar sind, nothwendig die zu jenem Systeme gehörigen ϑ-Functionen zweier Variabeln sich algebraisch durch die zu jenen beiden elliptischen Integralen gehörigen ϑ-Functionen einer Variabeln ausdrücken lassen; die Umkehrung dieses Satzes ergiebt sich offenbar aus den bekannten Beziehungen zwischen den ϑ-Functionen und den Variabeln

*) Vergl. die Arbeit von Hermite (Comptes rendus tome XL) „sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes“ und meine Arbeiten über die Transformation der hyperelliptischen Functionen im Journal von Crelle.

der Integrale unmittelbar. Es sind somit nur die Perioden des vorgelegten Integrales zu berechnen, aus diesen die Moduln der ϑ-Functionen zu bilden und zu sehen, ob das Fundamental-ϑ sich algebraisch auf elliptische ϑ-Functionen reduciren lasse; ist dies der Fall, so wird das hyperelliptische Integral auf elliptische Integrale reducirbar sein, und die Reductionsformel der ϑ-Function wird, in die entsprechende Beziehung zwischen den zugehörigen Integralgrenzen umgesetzt, die algebraische Transformation des hyperelliptischen Integrales in die elliptischen liefern.

Legen wir z. B. der Untersuchung das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^8-1}},$$

oder das aus diesem durch die Substitution $z^2 = y$ hervorgehende

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}}$$

zu Grunde, welchem das hyperelliptische System entspricht

$$\frac{dy_1}{\sqrt{y_1(y_1{}^4-1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{y_2(y_2{}^4-1)}} = du_1$$

$$\frac{y_1\,dy_1}{\sqrt{y_1(y_1{}^4-1)}} + \frac{y_2\,dy_2}{\sqrt{y_2(y_2{}^4-1)}} = du_2,$$

so ergeben sich bekanntlich die 4 gleichzeitigen Periodenpaare in der Form

$$\omega_{11} = -\int_i^0 \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} \qquad \omega'_{11} = -\,i\int_1^i \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^4)}}$$

$$\omega_{12} = \int_{-i}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} \qquad \omega'_{12} = -\,i\int_1^i \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} + i\int_0^{-i} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^4)}}$$

$$\omega_{21} = -\int_i^0 \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} \qquad \omega'_{21} = -\,i\int_1^i \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y^4)}}$$

$$\omega_{22} = \int_{-i}^{-1} \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} \qquad \omega'_{22} = -\,i\int_1^i \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} + i\int_0^{-i} \frac{y\,dy}{\sqrt{y(1-y^4)}}.$$

Nun folgt aber leicht, dass

$$\int_0^i \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} = -\sqrt{i}\int_0^{-1} \frac{dy}{\sqrt{-y(y^4-1)}}$$

$$= -\sqrt{i}\int_0^{-i} \frac{dy}{\sqrt{-y(y^4-1)}} - \sqrt{i}\int_{-i}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{-y(y^4-1)}}$$

$$= \sqrt{i}\int_0^i \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} - \frac{\sqrt{i}}{i}\int_{-i}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}},$$

oder dass

$$\omega_{12} = (i - \sqrt{i})\,\omega_{11}$$

ist; ebenso ergiebt sich

$$\omega_{22} = -(i\sqrt{i} + i)\omega_{21}, \quad \omega'_{11} = (i + \sqrt{i})\omega_{11}, \quad \omega'_{12} = (1 + i\sqrt{i} - i)\,\omega_{11},$$

$$\omega'_{21} = (1 + \sqrt{i})\,\omega_{21}; \quad \omega'_{22} = (1 + i\sqrt{i} + i)\,\omega_{21}.$$

Daraus folgt aber in bekannten Zeichen, wenn

$$\sigma = \begin{vmatrix} 2\,\omega_{11} & 2\,\omega_{12} \\ 2\,\omega_{21} & 2\,\omega_{22} \end{vmatrix} = -4\sqrt{i}(i + 2\sqrt{i} - 1)\,\omega_{11}\,\omega_{22}$$

gesetzt wird, dass die ϑ-Moduln die Werthe annehmen:

$$\tau_{11} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} 2\,\omega'_{11} & 2\,\omega_{12} \\ 2\,\omega'_{21} & 2\,\omega_{22} \end{vmatrix} = \frac{2(i-1)}{i + 2\sqrt{i} - 1} = \frac{2}{3}(1 + i\sqrt{2})$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} 2\,\omega'_{12} & 2\,\omega_{12} \\ 2\,\omega'_{22} & 2\,\omega_{22} \end{vmatrix} = \tau_{21} = \frac{i-1}{i + 2\sqrt{i} - 1} = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{2})$$

$$\tau_{22} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} 2\,\omega_{11} & 2\,\omega'_{12} \\ 2\,\omega_{21} & 2\,\omega'_{22} \end{vmatrix} = \frac{i - 2\sqrt{i} - 1}{i + 2\sqrt{i} - 1} = \frac{1}{3}(-1 + 2i\sqrt{2}),$$

und sich somit die Beziehung ergiebt:

$$\tau_{11} = 2\,\tau_{12},$$

während die Argumente der ϑ-Functionen v_1 und v_2 vermöge der Gleichungen

$$u_1 = 2\,\omega_{11}\,v_1 + 2\,\omega_{12}\,v_2$$

$$u_2 = 2\,\omega_{21}\,v_1 + 2\,\omega_{22}\,v_2$$

durch die Ausdrücke bestimmt sind

$$v_1 = \frac{(i\sqrt{i} + i)\,\omega_{21}\,u_1 + (i - \sqrt{i})\,\omega_{11}\,u_2}{2(2i - \sqrt{i} + i\sqrt{i})\,\omega_{11}\,\omega_{21}}$$

$$v_2 = \frac{\omega_{21}\,u_1 - \omega_{11}\,u_2}{2(2i - \sqrt{i} + i\sqrt{i})\,\omega_{11}\,\omega_{21}}.$$

Gehen wir nun zur Untersuchung des Fundamental-ϑ über, so folgt vermöge der gefundenen Beziehung $\tau_{11} = 2\,\tau_{12}$, dass

$$\vartheta(v_1, v_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{n_2}\, e^{-\pi(\tau_{11}n_1^2 + 2\tau_{12}n_1n_2 + \tau_{22}n_2^2)} \cos(2n_1v_1 + 2n_2v_2)\pi$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{n_2}\, e^{-\pi\left[\tau_{11}\left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2 + \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2\right]} \cos(2n_1v_1 + 2n_2v_2)\pi,$$

wenn $v_1 = u_1'$ …

…tzt wird,

$$) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)^2} \cdot e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2} \cos 2\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)u_1'\pi \cos 2 n_2 u_2'\pi$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2} \sin 2\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)u_1'\pi \sin 2 n_2 u_2'\pi$$

ist. Nun ist aber

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)^2} \cos 2\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)u_1'\pi\, e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2} \cos 2 n_2 u_2'\pi$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\tau_{11}(n_1+\nu_2)^2} \cos 2(n_1+\nu_2)u_1'\pi\, e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)4\nu_2^2} \cos 4\nu_2 u_2'\pi$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(n_1+\nu_2+\frac{1}{2}\right)^2} \cos 2\left(n_1+\nu_2+\frac{1}{2}\right)u_1'\pi \times e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)(2\nu_2+1)^2} \cos 2(2\nu_2+1)u_2'\pi,$$

oder wenn $n_1+\nu_2 = m_1$ gesetzt wird,

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\tau_{11}m_1^2} \cos 2 m_1 u_1'\pi\, e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)4\nu_2^2} \cos 4\nu_2 u_2'\pi$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(m_1+\frac{1}{2}\right)^2} \cos (2m_1+1)u_1'\pi\, e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)(2\nu_2+1)^2} \cos 2(2\nu_2+1)u_2'\pi$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} e^{-\pi\tau_{11}m_1^2} \cos 2m_1u_1'\pi \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)4\nu_2^2} \cos 4\nu_2 u_2'\pi$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} e^{-\pi\tau_{11}\left(m_1+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2m_1+1)u_1'\pi \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)(2\nu_2+1)^2} \cos 2(2\nu_2+1)u_2'\pi$$

und daher mit Hülfe der Definitionsgleichungen der elliptischen ϑ-Functionen

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2} \cos 2\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)u_1'\pi \cos 2n_2u_2'\pi$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta(u_1', \tau_{11})_3\left\{\vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_3 + \vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_0\right\}$$

$$\ldots \frac{1}{2}\vartheta(u_1', \tau_{11})_2\left\{\vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_3 - \vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_0\right\}$$

Machen wir in dem zweiten Theil der oben hingeschriebenen hyperelliptischen ϑ-Function dieselbe Transformation, so folgt

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} e^{-\pi\tau_{11}\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2} \sin 2\left(n_1+\frac{n_2}{2}\right)u_1'\pi \sin 2n_2u_2'\pi$$

$$:\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} e^{-\pi\tau_{11}m_1^2} \sin 2m_1u_1'\pi \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)4\nu_2^2} \sin 4\nu_2u_2'\pi$$

$$\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} e^{-\pi\tau_{11}\left(m_1+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2m_1+1)u_1'\pi \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu_2} e^{-\pi\left(\tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)(2\nu_2+1)^2} \sin 2(2\nu_2+1)u_2'\pi = 0,$$

und es ergiebt sich somit für $\tau_{11} = 2\tau_{12}$ die Beziehung

$$(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = \frac{1}{2}\vartheta(u_1', \tau_{11})_3 \left\{\vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_3 + \vartheta\left(u_1', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_0\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\vartheta(u_1', \tau_{11})_2 \left\{\vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_3 - \vartheta\left(u_2', \tau_{22}-\frac{\tau_{11}}{4}\right)_0\right\},$$

worin

$$u_1' = \frac{(i-\sqrt{i})\,\omega_{11}u_2 + (i\sqrt{i}+i)\,\omega_{21}u_1}{2(2i-\sqrt{i}+i\sqrt{i})\,\omega_{11}\omega_{21}}$$

$$u_2' = \frac{\left(1-\frac{1}{2}i\sqrt{i}-\frac{1}{2}i\right)\omega_{21}u_1 - \left(1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\sqrt{i}\right)\omega_{11}u_2}{2(2i-\sqrt{i}+i\sqrt{i})\,\omega_{11}\omega_{21}}$$

ist, und aus welcher somit nach den obigen Auseinandersetzungen folgt, dass das vorgelegte Integral auf elliptische Integrale reducirbar ist; in der That ist das Integral

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}}$$

nichts anderes als das oben auf algebraischem Wege reducirte Jacobi'sche Integral

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1+\varkappa y)(1+\lambda y)(1-\varkappa\lambda y)}},$$

wenn in letzterem $\varkappa = 1$, $\lambda = i$ gesetzt wird. Macht man in der eben gefundenen Beziehung zwischen den hyperelliptischen und elliptischen ϑ-Functionen Substitutionen von halben Perioden, so erhält man die entsprechenden Gleichungen für die anderen ϑ-Functionen; setzt man ferner die Argumente gleich Null, so ergeben sich die Beziehungen zwischen den Integralmoduln, und die nun zu bewerkstelligende Zusammensetzung der reducirten ϑ-Functionen zu Quotienten liefert dann die algebraische Transformation, die wir jedoch schon oben gefunden haben und nicht noch auf diesem Wege herleiten wollen.

Aber nicht bloss die Frage der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische, sondern auch die der Reduction hyperelliptischer Integrale irgend welcher Ordnung auf solche niederer Ordnung überhaupt ist vermöge des oben ausgesprochenen allgemeinen Transformationssatzes einer Beantwortung fähig. Es war nämlich gezeigt worden, dass, wenn ein hyperelliptisches Integral $2\sigma+1^{\text{ter}}$ Ordnung auf hyperelliptische Integrale niedrigerer, $2\tau+1^{\text{ter}}$ Ordnung reducirbar ist, nothwendig ein hyperelliptisches Integral $2\sigma+1^{\text{ter}}$ Ordnung und erster Gattung gleich sein muss einer Summe von τ gleichartigen hyperelliptischen Integralen $2\tau+1^{\text{ter}}$ Ordnung, deren τ Grenzen Lösungen einer Gleichung τ^{ten} Grades sind

$$(70) \cdots\cdot H^{\tau} + \omega_1(x) H^{\tau-1} + \cdots \omega_{\tau}(x) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x, und für welche die zu den Lösungen dieser Gleichung gehörigen Irrationalitäten $\sqrt{R_1(H)}$ sich durch eben diese Lösungen, durch x und die zu dem ursprünglichen hyperelliptischen Integrale $2\sigma+1^{\text{ter}}$ Ordnung gehörige Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ in der Form ausdrücken lassen

$$\frac{\sqrt{R_1(H)}}{\sqrt{R(x)}} = F(x, H),$$

oder

$$(71) \cdots\cdot \frac{\sqrt{(H-\beta_1)(H-\beta_2)\cdots(H-\beta_{2\tau+1})}}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{2\sigma+1})}} = F(x, H),$$

wenn $F(x, H)$ eine rationale Function von x und H bedeutet, und diese Bedingung war auch, wie oben gezeigt worden, die hinreichende. Die Frage also, wie ein hyperelliptisches Integral $2\sigma+1^{\text{ter}}$ Ordnung beschaffen sein müsse, damit es auf hyperelliptische Integrale $2\tau+1^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt werden könne, lässt sich somit auch folgendermassen ausdrücken:

Welche Beziehungen müssen zwischen den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2\sigma+1}$ *bestehen, damit die rationalen Functionen* $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots \omega_{\tau}(x)$ *so bestimmt werden können, dass für die* τ *Lösungen der Gleichung* (70) *die linke Seite der Gleichung* (71) *sich rational durch* x *und durch die respective Lösung ausdrücken lässt oder — in bekannter Ausdrucksweise — dass jene linke Seite mit der Lösung der Gleichung* (70) *gleichverzweigt ist?*

Wie nun diese Aufgabe in allen Fällen zu lösen ist, mag an der Behandlung*) der Frage gezeigt werden, welche die Reduction

*) Die nachfolgende Methode gestattet auch weit allgemeinere Transformationsfragen zu behandeln und liefert, wie ich gezeigt habe, z. B. den Satz, dass ein allgemeines Transformationsproblem für hyperelliptische Integrale von höherer Ordnung als der ersten nicht existirt; s. meine Arbeit „Ueber die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips". (Crelle's Journal B. 87.)

der hyperelliptischen Functionen zweiter Ordnung auf diejenigen erster Ordnung zum Gegenstande hat und somit, da $\tau = 2$ ist, von der Untersuchung der Gleichung ausgehen muss

$$(72) \cdots \omega_0(x) H^2 + \omega_1(x) H + \omega_2(x) = 0,$$

in welcher die Coefficienten dieser Gleichung ganze Functionen von x bedeuten. Beschränken wir zunächst das Problem auf die Aufsuchung von Transformationen *zweiten* Grades, welche das noch näher zu chrarakterisirende hyperelliptische Integral zweiter Ordnung auf solche erster Ordnung zurückführt, so wäre die folgende Aufgabe zu lösen:

Es sollen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Wurzeln eines Polynoms 7ten *Grades*

$$(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)$$

angegeben werden, damit für die Lösungen η_1 *und* η_2 *der quadratischen Gleichung*

$$(73) \cdots (1 + a_1 x + a_2 x^2)\eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)\eta + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 0,$$

worin $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ *noch zu bestimmende Constanten sind, der Quotient*

$$(\text{A}) \cdots \frac{\sqrt{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}}{\sqrt{(\eta-\beta_0)(\eta-\beta_1)(\eta-\beta_2)(\eta-\beta_3)(\eta-\beta_4)}},$$

in welchem die Constanten $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ *noch bestimmt werden sollen, respective mit* η_1 *und* η_2 *gleichverzweigt ist* — somit die Erweiterung der oben aufgeworfenen und beantworteten Frage nach den durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische Integrale reducirbaren hyperelliptischen Integralen erster Ordnung, welche auf den Jacobi'schen Fall führten.

Wir behaupten, dass, wenn die bestimmbaren Grössen des Problems den Bedingungen unterworfen werden, dass in der Gleichung (73) dem

(𝔞) $\cdots x = \alpha_0$ die Werthe $\eta = \beta_0$ und β_1
(𝔟) $\cdots x = \alpha_1$ „ $\eta = \beta_0$ und β_1
(𝔠) $\cdots x = \alpha_2$ „ $\eta = \beta_2$ und β_3
(𝔡) $\cdots x = \alpha_3$ „ $\eta = \beta_2$ und β_3
(𝔢) $\cdots x = \alpha_4$ „ $\eta = \beta_4$ und ∞
(𝔣) $\cdots x = \infty$ „ $\eta = \beta_4$ und ∞
(𝔤) $\cdots x = \alpha_5$ eine Verzweigung von η und
(𝔥) $\cdots x = \alpha_6$ „ „ „

entsprechen, der Quotient (A) in der That wie η verzweigt ist, und werden später untersuchen, ob den eben angegebenen Bedingungen

sich stets durch algebraische Beziehungen zwischen den Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_6$ genügen lasse. Nehmen wir also zunächst an, man könne die eben aufgestellten Bedingungen befriedigen, so wird, weil nach ($\mathfrak{a}$) dem Werthe $x = \alpha_0$ die beiden verschiedenen Werthe β_0 und β_1 entsprechen sollen, nothwendig vermöge der quadratischen Gleichung (73) η um β_0 und β_1 herum eine eindeutige Function von x in der Umgebung von α_0, und somit nach der Taylor'schen Reihe

$$(74) \cdots\cdot \eta - \beta_0 = m_1(x - \alpha_0) + m_2(x - \alpha_0)^2 + \cdots$$

sein; daraus folgt

$$\eta - \beta_0 = m_1(x - \alpha_0)\left\{1 + n_1(x - \alpha_0) + \cdots\right\},$$

und somit

$$(\eta - \beta_0)^{\frac{1}{2}} = m_1^{\frac{1}{2}}(x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + l_1(x - \alpha_0) + \cdots\right\},$$

so dass in dem Quotienten (A) in der Umgebung von α_0 für die Lösung η, welche für $x = \alpha_0$ den Werth β_0 annimmt,

$$\frac{\sqrt{\eta - \beta_0}}{\sqrt{x - \alpha_0}}$$

eine eindeutige Function von x wird, während die anderen Factoren des Zählers und Nenners von (A) an sich eindeutige Functionen sind, und daher (A) selbst in der Umgebung von $x = \alpha_0$ für $\eta = \beta_0$ eindeutig, also so verzweigt wie η vermöge der Gleichung (74) selbst, was eben nachgewiesen werden sollte. Dasselbe gilt in der Umgebung von $x = \alpha_0$ für die Lösung $\eta = \beta_1$, und analog auch für die weiteren drei Bedingungen ($\mathfrak{b}$), ($\mathfrak{c}$), ($\mathfrak{d}$). Für die Bedingung ($\mathfrak{e}$), welche wieder η als eindeutige Function um α_4 herum definirt, wird für die erste Zusammenstellung $\alpha_4\ \beta_4$ der vorige Schluss gelten; soll dagegen dem Werthe $x = \alpha_4$ der Werth $\eta = \infty$ entsprechen, so muss, wenn wieder eben so wenig wie oben, weitere Bedingungen hinzutreten, im Allgemeinen

$$(75) \cdots\cdot \eta = \varkappa_{-1}(x - \alpha_4)^{-1} + \varkappa_0 + \varkappa_1(x - \alpha_4) + \cdots$$

oder

$$\eta = \varkappa_{-1}(x - \alpha_4)^{-1}\left\{1 + \varrho_1(x - \alpha_4) + \cdots\right\},$$

und daher

$$(76) \cdots\cdot \eta^{\frac{5}{2}} = \varkappa_{-1}^{\frac{5}{2}}(x - \alpha_4)^{-\frac{5}{2}}\left\{1 + \sigma_1(x - \alpha_4) + \cdots\right\}$$

sein; beachtet man nun, dass die Entwicklung des Quotienten (A) in der Umgebung von $x = \alpha_4$, $\eta = \infty$ folgendermassen lautet

$$\frac{(x - \alpha_4)^{\frac{1}{2}}\left\{A_0 + A_1(x - \alpha_4) + \cdots\right\}}{\eta^{\frac{5}{2}}\left\{1 + B_1\eta^{-1} + \cdots\right\}},$$

so sieht man sofort, dass dieser Quotient vermöge der Gleichungen (75) und (76) wieder eindeutig ist, also den durch Gleichung (75) definirten Charakter der Function η besitzt. Was die Gleichung (f) betrifft, welche wiederum η als eindeutige Function von x in der Umgebung von $x = \infty$ oder, wenn $x = \xi^{-1}$ gesetzt wird, in der Umgebung von $\xi = 0$ definirt, so wird sich für die Zusammenstellung $x = \infty$, $\eta = \beta_4$

$$(77) \cdots\cdot \eta - \beta_4 = m_1 x^{-1} + m_2 x^{-2} + \cdots = m_1 x^{-1}\left\{1 + n_1 x^{-1} + \cdots\right\}$$

und daraus

$$(78) \cdots\cdot (\eta - \beta_4)^{\frac{1}{2}} = m_1^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + p_1 x^{-1} + \cdots\right\}$$

ergeben, so dass die Entwicklung von (A) in der Umgebung dieser Werthe lautet

$$\frac{x^{\frac{7}{2}}\left\{1 + \sigma_1 x^{-1} + \cdots\right\}}{(\eta - \beta_4)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \tau_1 (\eta - \beta_4) + \cdots\right\}},$$

und daher vermöge der Gleichungen (77) und (78) wiederum eindeutig ist um $x = \infty$, $\eta = \beta_4$ herum, wie nach der Gleichung (77) η selbst. Entsprechen sich jedoch $x = \infty$, $\eta = \infty$ eindeutig, so ist

$$(79) \cdots\cdot \eta = \varrho_1 x + \varrho_0 + \varrho_{-1} x^{-1} + \cdots = \varrho_1 x\left\{1 + \sigma_1 x^{-1} + \cdots\right\}$$

also

$$(80) \cdots\cdot \eta^{\frac{5}{2}} = \varrho_1^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}\left\{1 + \tau_1 x^{-1} + \cdots\right\},$$

und somit der Quotient (A) vermöge (79) und (80)

$$\frac{x^{\frac{7}{2}}\left\{1 + l_1 x^{-1} + \cdots\right\}}{\eta^{\frac{5}{2}}\left\{1 + \lambda_1 \eta^{-1} + \cdots\right\}}$$

eindeutig um $x = \infty$ $\eta = \infty$, also vom Charakter der Function η selbst.

Wir haben somit bisher gefunden, dass der Quotient (A) als Function von x aufgefasst um die Punkte $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \infty$ herum mit η selbst, welches durch die Gleichung (73) definirt sein sollte, gleichverzweigt ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung (73) den von (a) bis (f) gestellten Bedingungen wird genügen können, was später untersucht werden soll.

Gehen wir nunmehr zur Bedingung (g) über, welche verlangt, dass η im Punkte $x = \alpha_5$ verzweigt, also vermöge der Natur der Gleichung (73) zweideutig sei, so folgt

$$(81) \cdots\cdot \eta - \eta_0 = \nu_1 (x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}} + \nu_2 (x - \alpha_5)^{\frac{2}{2}} + \cdots = \nu_1 (x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \omega_1 (x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}} + \cdots\right\},$$

worin η_0 einen endlichen, von $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_4$ verschiedenen Werth bezeichnen soll; da nun die Entwicklung des Quotienten (A) um $x = \alpha_5$, $\eta = \eta_0$ herum lautet

$$\frac{(x-\alpha_5)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + r_1(x-\alpha_5) + \cdots\right\}}{H_0\left\{1 + H_1(\eta-\eta_0) + \cdots\right\}},$$

oder vermöge (81)

$$\frac{1}{H_0}(x-\alpha_5)^{\frac{1}{2}} + P_1(x-\alpha_5)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

so wird (A) in α_5 ebenso verzweigt sein, wie es η selbst nach der Gleichung (81) ist; genau dasselbe gilt offenbar für die Bedingung ($\mathfrak{h}$), und wir finden somit zunächst, dass der Quotient (A) in den Punkten α_0, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \infty$ so verzweigt ist wie η selbst, wenn diese Grösse als Lösung der Gleichung (73) so bestimmt werden kann, dass den Bedingungen ($\mathfrak{a}$) bis ($\mathfrak{h}$) Genüge geschieht. Zugleich erkennt man aber auch, dass für jedes andere x dieselbe Eigenschaft statt haben muss; denn einerseits kann einem $x = \xi$, welches nicht zu jenen Werthen gehört, keiner der Werthe $\eta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \infty$ entsprechen, wie vermöge der Bedingungen ($\mathfrak{a}$) bis ($\mathfrak{f}$), welche offenbar auch in die Form gesetzt werden können

$$\begin{array}{ll} \eta = \beta_0 & x = \alpha_0 \text{ und } \alpha_1 \\ \eta = \beta_1 & x = \alpha_0 \text{ und } \alpha_1 \\ \eta = \beta_2 & x = \alpha_2 \text{ und } \alpha_3 \\ \eta = \beta_3 & x = \alpha_2 \text{ und } \alpha_3 \\ \eta = \beta_4 & x = \alpha_4 \text{ und } \infty \\ \eta = \infty & x = \alpha_4 \text{ und } \infty, \end{array}$$

und weil nach (73) zu jedem η-Werthe nur 2 Werthe von x gehören, unmittelbar zu erkennen ist; andererseits wird, wenn η für $x = \xi$ eindeutig ist,

$$(82) \cdots\cdot \eta - \eta_1 = m_1(x-\xi) + m_2(x-\xi)^2 + \cdots$$
$$= m_1(x-\xi)\left\{1 + n_1(x-\xi) + \cdots\right\}$$

sein, und somit der Quotient (A) lauten

$$(\mathrm{B}) \cdots\cdot \frac{Q_0 + Q_1(x-\xi) + \cdots}{R_0 + R_1(\eta-\eta_1) + \cdots},$$

also vermöge (82) ebenfalls um $x = \xi$ herum eindeutig wie η selbst sein; ist dagegen η für $x = \xi$ zweideutig, also

$$\eta - \eta_1 = p_1(x-\xi)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + q_1(x-\xi)^{\frac{1}{2}} + \cdots\right\},$$

so wird (A) vermöge (B) eine zweideutige Function von x um $x =$

herum wie η selbst; es ergiebt sich somit, dass, wenn die Coefficienten der Gleichung (73) so bestimmt werden könnten, dass den Bedingungen ($\mathfrak{a}$) bis ($\mathfrak{h}$) Genüge geschieht, der Quotient (A) wie die Grösse η selbst verzweigt, also durch x und η rational ausdrückbar wäre, woraus nach dem Früheren folgen würde, dass dann ein zu dem Zähler von (A) gehöriges hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung auf zwei zu dem Nenner von (A) gehörige hyperelliptische Integrale erster Ordnung reducirt werden könne.

Fassen wir nunmehr zuerst die Bedingung ($\mathfrak{e}$) auf, nach welcher dem Werthe $x = \alpha_4$ $\eta = \infty$ entsprechen soll, so muss nach (73) bekanntlich

$$(83) \cdots\cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 = a_2 (x - \alpha_4)(x - \xi_1)$$

sein, während der andere dem $x = \alpha_4$ entsprechende Werth von η nach (73) durch den Ausdruck bestimmt ist

$$(84) \cdots - \frac{c_0 + c_1 \alpha_4 + c_2 \alpha_4^2}{b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2} = \beta_4.$$

Was ferner die Bedingung ($\mathfrak{f}$) anlangt, nach welcher dem Werthe $x = \infty$ die Werthe $\eta = \beta_4$ und $\eta = \infty$ entsprechen sollen, so werden, weil, wenn $x = \frac{1}{\xi}$, $\eta = \frac{1}{y}$ gesetzt wird, dem Werthe $\xi = 0$ vermöge (83) in der Gleichung (73) oder in

$$a_2 (1 - \alpha_4 \xi)(1 - \xi \xi_1) + (b_0 \xi^2 + b_1 \xi + b_2) y + (c_0 \xi^2 + c_1 \xi + c_2) y^2 = 0$$

die Werthe $y = 0$ und $y = \frac{1}{\beta_4}$ zugehören müssen; da aber für ein endliches ξ_1 dem $\xi = 0$ nicht $y = 0$ entsprechen kann, so muss in (83) $a_2 = 0$ genommen werden, d. h. in (73) der Coefficient von η^2 linear von der Form $1 + a_1 x$ sein, und da

$$1 + a_1 x = a_1 \left(x + \frac{1}{a_1}\right)$$

für $x = \alpha_4$ verschwinden, also $\frac{1}{a_1} = - \alpha_4$, oder $a_1 = - \frac{1}{\alpha_4}$ sein muss, so wird die Gleichung (73) in

$$(85) \cdots\cdot \left(1 - \frac{x}{\alpha_4}\right)\eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)\,\eta + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = 0$$

übergehen, welche also einerseits der Bedingung ($\mathfrak{e}$) genügt, indem auch noch die Beziehung (84) gültig bleibt, und für welche andererseits die durch Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $\eta = \frac{1}{y}$ transformirte Gleichung lautet

$$(86) \cdots\cdot \xi\left(\xi - \frac{1}{\alpha_4}\right) + (b_0 \xi^2 + b_1 \xi + b_2)\, y + (c_0 \xi^2 + c_1 \xi + c_2)\, y^2 = 0,$$

welche in der That für $\xi = 0$ den Werth $y = 0$ liefert, und aus

welcher, da nach (f) $\xi = 0$ auch $y = \frac{1}{\beta_4}$ entsprechen soll,

$$(87) \cdots\cdots -\frac{c_2}{b_2} = \beta_4$$

folgt. Die Zusammenstellung von (84) und (87) liefert

$$(88) \cdots\cdots c_2 b_0 - c_0 b_2 + \alpha_4 (c_2 b_1 - c_1 b_2) = 0$$

als Bedingungsgleichung zwischen den Constanten des Problems, während β_4 aus (87) selbst bestimmt wird.

Nachdem die Bedingungen (e) und (f) erfüllt sind, werden die Constanten $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ der Gleichung (85) noch so zu bestimmen sein, dass auch den übrigen Genüge geschieht; da vermöge der Bedingungen (a) und (b) die Gleichung (85) für α_0 und α_1 dieselben beiden Lösungen β_0 und β_1 besitzen soll, so müssen offenbar die Gleichungen bestehen:

$$(89) \cdots\cdots \frac{1-\frac{\alpha_0}{\alpha_4}}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}} = \frac{b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\alpha_0^2}{b_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_1^2} = \frac{c_0 + c_1\alpha_0 + c_2\alpha_0^2}{c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2},$$

und ebenso ziehen die Bedingungen (c) und (b) die Gleichungen nach sich

$$(90) \cdots\cdots \frac{1-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}}{1-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}} = \frac{b_0 + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_2^2}{b_0 + b_1\alpha_3 + b_2\alpha_3^2} = \frac{c_0 + c_1\alpha_2 + c_2\alpha_2^2}{c_0 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_3^2};$$

da endlich η in den Punkten α_5 und α_6 verzweigt sein soll, so folgt, dass die Discriminante der Gleichung (85) für α_5 und α_6 verschwinden muss, oder dass die Bedingungsgleichungen bestehen müssen

$$(91) \cdots\cdots (b_0 + b_1\alpha_5 + b_2\alpha_5^2)^2 - 4\left(1 - \frac{\alpha_5}{\alpha_4}\right)(c_0 + c_1\alpha_5 + c_2\alpha_5^2) = 0$$

$$(92) \cdots\cdots (b_0 + b_1\alpha_6 + b_2\alpha_6^2)^2 - 4\left(1 - \frac{\alpha_6}{\alpha_4}\right)(c_0 + c_1\alpha_6 + c_2\alpha_6^2) = 0,$$

und es ergeben sich dann die Werthe von $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ unmittelbar. Untersucht man aber den ersten Theil der Bedingung (89), so lässt sich derselbe auf die Form bringen

$$(93) \cdots\cdots b_0 + b_1\alpha_4 + b_2\alpha_4^2 - b_2(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_0) = 0,$$

und ebenso lautet der erste Theil der Bedingung (90)

$$(94) \cdots\cdots b_0 + b_1\alpha_4 + b_2\alpha_4^2 - b_2(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2) = 0,$$

woraus, wenn b_2 von Null verschieden ist, die Beziehung folgt

$$(95) \cdots\cdots (\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_0) = (\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2).$$

Ebenso folgt aus den zweiten Theilen der Bedingungen (89) und (90), dass

$$(96) \cdots\cdot c_0 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_4^2 - c_2(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_0) = 0$$

und

$$(97) \cdots\cdot c_0 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_4^2 - c_2(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2) = 0$$

ist, woraus sich wieder (95) und durch Zusammenstellung mit (93) und (94) die Identität von (88) ergiebt. Die Gleichungen (91), (92), (93), (96) liefern nun Bestimmungsgleichungen für die Constanten b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, und wir finden somit, *dass ein zu dem Polynom*

$$(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)$$

gehöriges hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung im Allgemeinen dann durch eine Transformation zweiten Grades von der Form

$$(1 + a_1x + a_2x^2)\eta^2 + (b_0 + b_1x + b_2x^2)\eta + c_0 + c_1x + c_2x^2 = 0$$

auf hyperelliptische Integrale erster Ordnung zurückführbar ist, wenn zwischen den Wurzeln des Polynoms die Beziehung besteht

$$(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_0) = (\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_2).$$

Es bleibt aber immerhin möglich, dass eine Substitution, welche in η linear und in x quadratisch ist, also statt (73) die Form hat

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)\eta + b_0 + b_1x + b_2x^2 = 0,$$

den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}}{\sqrt{(\eta-\beta_0)(\eta-\beta_1)(\eta-\beta_2)(\eta-\beta_3)(\eta-\beta_4)}}$$

zu einer mit η gleichverzweigten, d. h. zu einer rationalen Function von η macht. Ordnet man nämlich, um bei der angegebenen Methode zu bleiben — man könnte hier unmittelbar für η die rationale Function in x substituiren — die Werthe

$$\begin{array}{ll} x = \alpha_0 & \eta = \beta_1 \\ x = \alpha_1 & \eta = \beta_1 \\ x = \alpha_2 & \eta = \beta_2 \\ x = \alpha_3 & \eta = \beta_2 \\ x = \alpha_4 & \eta = \beta_3 \\ x = \alpha_5 & \eta = \beta_3 \\ x = \alpha_6 & \eta = \beta_4 \\ x = \infty & \eta = \beta_4 \end{array}$$

einander zu und stellt weiter fest, dass $\eta = \beta_0$ und $\eta = \infty$ zwei Werthe seien, für die x als Function von η aufgefasst einen einfachen

Verzweigungspunkt hat, so wird, was die Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_6, \infty$ betrifft, unmittelbar ersichtlich sein, dass der Quotient der Irrationalitäten wieder rational in x ist, und da

$$\eta - \beta_0 = \mu_2 (x - \xi)^2 + \mu_3 (x - \xi)^3 + \cdots$$

und

$$\eta = \nu_2 (x - \xi)^{-2} + \nu_3 (x - \xi)^{-1} + \cdots$$

sein soll, so wird $\sqrt{\eta - \beta_0}$ sowohl wie $\sqrt{\eta}$ selbst wieder eindeutig sein, und es wird sich also nur darum handeln, nachzusehen, ob die aufgestellten Bedingungen überhaupt erfüllt werden können. Die ersten acht Bedingungen geben die vier Gleichungen

$$\frac{b_0 + b_1 \alpha_0 + b_2 \alpha_0^2}{a_0 + a_1 \alpha_0 + a_2 \alpha_0^2} = \frac{b_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1^2}{a_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_1^2},$$

$$\frac{b_0 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_2^2}{a_0 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2^2} = \frac{b_0 + b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2}{a_0 + a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_3^2},$$

$$\frac{b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2}{a_0 + a_1 \alpha_4 + a_2 \alpha_4^2} = \frac{b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \alpha_5^2}{a_0 + a_1 \alpha_5 + a_2 \alpha_5^2},$$

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) \alpha_6 + a_0 b_2 - b_0 a_2 = 0,$$

welche zu gleicher Zeit die Werthe $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ liefern, und somit 4 Bestimmungsgleichungen für die Grössen $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ und die Grössen α; um nun die beiden letzten Bedingungen zu erfüllen, muss x für $\eta = \beta_0$ und $\eta = \infty$ zwei gleiche Werthe annehmen und in diesen Punkten verzweigt sein; da aber die Substitutionsgleichung in die Form gebracht werden kann

$$x^2 (a_2 \eta + b_2) + x (a_1 \eta + b_1) + a_0 \eta + b_0 = 0,$$

so wird die Discriminante lauten

$$(a_1 \eta + b_1)^2 - 4 (a_2 \eta + b_2)(a_0 \eta + b_0) = 0,$$

oder

$$\eta^2 (a_1^2 - 4 a_0 a_2) + 2 \eta (a_1 b_1 - 2 a_2 b_0 - 2 a_0 b_2) + b_1^2 - 4 b_0 b_2 = 0,$$

und wenn diese die Lösungen $\eta = \infty$ und $\eta = \beta_0$ haben soll, so muss

$$a_1^2 - 4 a_0 a_2 = 0, \quad \beta_0 = \frac{4 b_0 b_2 - b_1^2}{2 (a_1 b_1 - 2 a_2 b_0 - 2 a_0 b_2)}$$

sein, wovon nur die erste Gleichung eine Bedingungsgleichung für die a liefert, während die zweite die Grösse β_0 bestimmt. Führt man nun die ersten drei der obigen Bedingungen auf eine einfachere leicht ersichtliche Form zurück, so erhält man im Ganzen die folgenden Gleichungen:

$$b_0 a_1 - b_1 a_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2)(\alpha_0 + \alpha_1) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\alpha_0 \alpha_1 = 0$$
$$b_0 a_1 - b_1 a_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2)(\alpha_2 + \alpha_3) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\alpha_2 \alpha_3 = 0$$
$$b_0 a_1 - b_1 a_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2)(\alpha_4 + \alpha_5) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\alpha_4 \alpha_5 = 0$$
$$(b_0 a_2 - a_0 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)\alpha_6 = 0$$
$$a_1^2 - 4 a_0 a_2 = 0,$$

und erkennt hieraus, dass die zwischen den Lösungen des hyperelliptischen Polynoms zweiter Ordnung bestehenden Bedingungsgleichungen in der Form dargestellt werden können

$$(98) \cdots\cdot (\alpha_6 - \alpha_0)(\alpha_6 - \alpha_1) = (\alpha_6 - \alpha_2)(\alpha_6 - \alpha_3)$$
$$(99) \cdots\cdot (\alpha_6 - \alpha_0)(\alpha_6 - \alpha_1) = (\alpha_6 - \alpha_4)(\alpha_6 - \alpha_5),$$

während die Substitutionscoefficienten aus den obigen Gleichungen berechnet werden können. So wird z. B. das aus dem Integral

$$(\mathrm{a}) \cdots\cdot \int \frac{dX}{\sqrt{X^8 - 1}}$$

durch die Substitution

$$X - 1 = \frac{1}{x}$$

hergeleitete Integral

$$(\mathrm{b}) - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x+1)^7 + (x+1)^6 x + (x+1)^5 x^2 + (x+1)^4 x^3 + (x+1)^3 x^4 + (x+1)^2 x^5 + (x+1) x^6 + x^7}}$$

durch die Substitution

$$x^2 \eta - (x+1)^2 = 0,$$

also eine in η lineare Gleichung, in

$$(\mathrm{c}) \cdots\cdot \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta(\eta^4 - 1)}},$$

also in ein hyperelliptisches Integral erster Ordnung übergehen, und es ist unmittelbar zu sehen, dass in diesem Beispiel die oben allgemein getroffene Zuordnung der Lösungen und die Festsetzung der Verzweigung in $\eta = \infty$ und $\eta = \beta_0 = -1$ hier für die resp. Werthe $x = 0$ und -1 in der That erfüllt ist; dass das gegebene hyperelliptische Integral zweiter Ordnung auch auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, geht aus der vorher angestellten Untersuchung hervor, nach welcher das Integral (c) nicht wesentlich von dem Jacobi'schen hyperelliptischen Integrale erster Ordnung verschieden ist.

Untersuchen wir nunmehr eine Transformation dritten Grades, welche ein hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung in solche erster Ordnung transformiren soll, so wird diese nach früheren Sätzen die Form haben müssen

$$(100) \cdots\cdot (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)\eta^2$$
$$+ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)\eta + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = 0,$$

und es wird wieder der Bedingung zu genügen sein, dass

$$\frac{\sqrt{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)}}{\sqrt{(\eta-\beta_0)(\eta-\beta_1)(\eta-\beta_2)(\eta-\beta_3)(\eta-\beta_4)}}$$

sich rational durch x und η ausdrücken lässt, also mit η gleichverzweigt ist; wir werden uns, nachdem wir in dem vorigen Beispiel das Princip der Methode ausführlich besprochen, im Folgenden kürzer fassen dürfen.

Stellen wir die Bedingungen auf, dass

dem Werthe	$x = \alpha_0$	die Werthe	$\eta = \beta_0$ und β_1
"	$x = \alpha_1$	"	$\eta = \beta_0$ und β_1
"	$x = \alpha_2$	"	$\eta = \beta_0$ und β_1
"	$x = \alpha_3$	"	$\eta = \beta_2$ und β_3
"	$x = \alpha_4$	"	$\eta = \beta_2$ und β_3
"	$x = \alpha_5$	"	$\eta = \beta_2$ und β_3
"	$x = \alpha_6$	"	$\eta = \beta_4$ und β_4 aber nicht verzweigt
"	$x = \infty$	"	$\eta = \beta_4$,

endlich dem Werthe $\eta = \infty$ dreimal der Werth $x = \infty$ entsprechen, so sieht man unmittelbar, dass, wenn diese Bedingungen erfüllt werden können, der Quotient jener Irrationalitäten wie η verzweigt sein wird; denn in Betreff aller Bedingungen mit Ausnahme der letzteren lehren dies die oben angestellten Betrachtungen, was jedoch die Festsetzung betrifft, dass dem Werthe $\eta = \infty$ dreimal der Werth $x = \infty$ entsprechen soll, so wird im Allgemeinen daraus

$$\eta = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + a_{-1} x^{-1} + \cdots$$

oder

$$\eta = a_3 x^3 \{1 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \cdots\}$$

folgen, und somit die Entwicklung des Quotienten der Irrationalitäten lauten

$$\frac{x^{\frac{7}{2}}\{1 + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \cdots\}}{a_3^{\frac{5}{2}} x^{\frac{15}{2}}\{1 + B_1 x^{-1} + B_2 x^{-2} + \cdots\}} = a_3^{-\frac{5}{2}} x^{-4}\{1 + C_1 x^{-1} + \cdots\},$$

also wieder eindeutig in x sein und den Charakter von η in $x = \infty$ haben. Es kommt somit nur darauf an, die Coefficienten der Gleichung (100) den obigen Bedingungen gemäss zu bestimmen. Soll dem $\eta = \infty$ $x = \infty$ dreimal entsprechen, so muss, wenn $\eta = \frac{1}{y}$, $x = \frac{1}{\xi}$ gesetzt wird, in der Gleichung

$$(c_0 \xi^3 + c_1 \xi^2 + c_2 \xi + c_3) y^2 + (b_0 \xi^3 + b_1 \xi^2 + b_2 \xi + b_3) y + (\xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3) = 0$$

für $y = 0$ $\xi = 0$ sein und zwar dreimal, also $a_3 = a_2 = a_1 = 0$; ausserdem soll für $x = \infty$ $\eta = \infty$ und β_4, also für $\xi = 0$ $y = 0$ und $\frac{1}{\beta_4}$ sein, woraus unmittelbar folgt, dass

$$(101) \cdots \cdot \beta_4 = -\frac{c_3}{b_3}$$

sein muss, wo c_3 von Null verschieden sein wird, es lautet somit die Gleichung (100)

$$(102) \cdots \cdot \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)\,\eta \\ + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = 0,$$

durch welche nunmehr den anderen Bedingungen zu genügen ist.

Da dem Werthe $x = \alpha_6$ der Werth $\eta = \beta_4$ zweimal entsprechen soll, so wird, da

$$\eta = -\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}{2}$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)^2 - 4(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)}$$

ist,

$$(103) \cdots (b_0 + b_1\alpha_6 + b_2\alpha_6^2 + b_3\alpha_6^3)^2 - 4(c_0 + c_1\alpha_6 + c_2\alpha_6^2 + c_3\alpha_6^3) = 0$$

eine Bedingungsgleichung liefern, und da $\eta = \beta_4$ durch (101) schon bestimmt war, eine zweite Bedingungsgleichung in der Form folgen

$$(104) \cdots \cdot b_0 + b_1\alpha_6 + b_2\alpha_6^2 + b_3\alpha_6^3 = \frac{2c_3}{b_3},$$

wodurch wiederum (103) in die einfachere übergeht

$$(105) \cdots \cdot c_0 + c_1\alpha_6 + c_2\alpha_6^2 + c_3\alpha_6^3 = \frac{c_3^2}{b_3^2};$$

aber damit für η, wie es gefordert war, keine Verzweigung in $x = \alpha_6$ stattfindet, muss auch die Ableitung der Function unter der Quadratwurzel für $x = \alpha_6$ verschwinden, also

$$(106) \cdots \cdot \frac{c_3}{b_3}(b_1 + 2b_2\alpha_6 + 3b_3\alpha_6^2) - (c_1 + 2c_2\alpha_6 + 3c_3\alpha_6^2) = 0,$$

oder

$$(107) \cdots \cdot (c_3 b_1 - b_3 c_1) + 2(c_3 b_2 - b_3 c_2)\,\alpha_6 = 0,$$

sein, so dass im Ganzen bis jetzt 3 Bedingungsgleichungen (104), (105), (107) zu erfüllen, und nur noch diejenigen Bedingungen zu berücksichtigen bleiben, welche den Punkten $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ entsprechen.

Soll nun die Gleichung (102) für die drei Werthe $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dieselben drei Wurzelpaare haben, so muss

$$(108) \cdots \cdot b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\alpha_0^2 + b_3\alpha_0^3 = b_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_1^2 + b_3\alpha_1^3 \\ = b_0 + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_2^2 + b_3\alpha_2^3$$

$$(109) \cdots \cdot c_0 + c_1\alpha_0 + c_2\alpha_0^2 + c_3\alpha_0^3 = c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + c_3\alpha_1^3 \\ = c_0 + c_1\alpha_2 + c_2\alpha_2^2 + c_3\alpha_2^3$$

und ebenso

$$(110) \cdots\cdot b_0 + b_1\alpha_3 + b_2\alpha_3^2 + b_3\alpha_3^3 = b_0 + b_1\alpha_4 + b_2\alpha_4^2 + b_3\alpha_4^3$$
$$= b_0 + b_1\alpha_5 + b_2\alpha_5^2 + b_3\alpha_5^3$$

$$(111) \cdots\cdot c_0 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_3^2 + c_3\alpha_3^3 = c_0 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_4^2 + c_3\alpha_4^3$$
$$= c_0 + c_1\alpha_5 + c_2\alpha_5^2 + c_3\alpha_5^3$$

sein. Man sieht sofort, dass die Gleichungen (108), wenn jede ihrer Seiten durch die Constante $\varkappa$ bezeichnet wird, die Beziehung nach sich ziehen

$$(112) \cdots\cdot b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = b_3 (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + \varkappa$$

und ebenso nach (110)

$$(113) \cdots\cdot b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = b_3 (x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5) + \varkappa_1,$$

woraus wiederum

$$(113\text{a}) \cdots\cdot (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$
$$- (x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5) = \frac{\varkappa_1 - \varkappa}{b_3}$$

folgt, oder

$$(114) \cdots\cdot \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \\ \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_5 + \alpha_4\alpha_5 \\ \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \frac{(\varkappa - \varkappa_1)}{b_3}; \end{cases}$$

ebenso ergiebt sich aus (109) und (111)

$$(115) \cdots\cdot c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = c_3 (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + \lambda$$
$$= c_3 (x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5) + \lambda_1,$$

und hieraus wiederum die Gleichungen (114), worin nach (113a)

$$\frac{\varkappa_1 - \varkappa}{b_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda}{c_3} = (\alpha_3 - \alpha_0)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$$

sein muss; ausserdem folgen aus den Gleichungen (112), (113), (115) die Beziehungen

$$b_0 = - b_3\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \varkappa, \quad b_1 = b_3(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2),$$
$$b_2 = - b_3(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2),$$
$$c_0 = - c_3\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \lambda, \quad c_1 = c_3(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2),$$
$$c_2 = - c_3(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2).$$

Die Bedingungen (104) und (105) lauten jetzt

$$(116) \cdots\cdot b_3(\alpha_6 - \alpha_0)(\alpha_6 - \alpha_1)(\alpha_6 - \alpha_2) + \varkappa = \frac{2c_3}{b_3},$$

$$(117) \cdots\cdot c_3(\alpha_6 - \alpha_0)(\alpha_6 - \alpha_1)(\alpha_6 - \alpha_2) + \lambda = \frac{c_3^2}{b_3^2},$$

während (107) vermöge der eben gefundenen Werthe von b_1, c_1, b_2, c_2 von selbst erfüllt wird; die Substitutionsgleichung (102) nimmt die

Form an

$$(118) \cdots\cdot \eta^2 + [b_3(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + \varkappa]\,\eta$$
$$+ [c_3(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + \lambda] = 0,$$

während nach (113a) die hyperelliptische Irrationalität lautet:

$$\text{(B)}\quad \sqrt{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\left[(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + \frac{\varkappa-\varkappa_1}{b_3}\right](x-\alpha_6)},$$

und die Gleichungen (116) und (117) die Beziehung liefern

$$(119) \cdots\cdot \varkappa c_3 - \lambda b_3 = \frac{c_3^2}{b_3}.$$

Bezeichnet man aber zur Abkürzung

$$(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \text{ mit } \varphi(x),$$

so lautet die Gleichung (118)

$$\eta^2 + (b_3\varphi(x) + \varkappa)\,\eta + c_3\varphi(x) + \lambda = 0,$$

und es wird daher

$$\eta = -\frac{b_3\varphi(x) + \varkappa}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b_3^2\varphi(x)^2 + 2\varphi(x)(b_3\varkappa - 2c_3) + \varkappa^2 - 4\lambda};$$

da aber vermöge der Beziehung (119), wie unmittelbar folgt,

$$(b_3\varkappa - 2c_3)^2 - b_3^2(\varkappa^2 - 4\lambda) = 0$$

ist, so ergiebt sich

$$(120) \cdots\cdot \eta = -b_3\varphi(x) - \varkappa + \frac{c_3}{b_3},$$

und wir sehen daher, dass für die gefundene Transformation η nicht, wie es den Festsetzungen gemäss nach (102) sein sollte, die Lösung einer irreductibeln quadratischen Gleichung ist, sondern sich rational durch x ausdrücken lassen würde, somit nicht die gesuchte Lösung unseres Problems giebt; aber trotzdem kommen wir in (120) zu Reductionsformeln von hyperelliptischen Integralen zweiter Ordnung. Da die Grössen b_3, c_3, $\varkappa_1$, α_0, α_1, α_2 und α_6 völlig willkürlich bleiben, so setze man $b_3 = c_3 = 1$ und zur Vereinfachung, was keine Beschränkung involvirt, eine der Lösungen z. B. $\alpha_6 = 0$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (116) und (117)

$$\varkappa = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2,\quad \lambda = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 1,$$

während die Substitution übergeht in

$$\eta = -x^3 + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)x^2 - (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)\,x - 1,$$

und die Werthe sich entsprechen

$$\begin{array}{ll} \eta = -\alpha_0\alpha_1\alpha_2 - 1, & x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \\ \eta = -\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - 1, & x = \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \end{array} \qquad \eta = -1 \quad x = \alpha_6 = 0,$$

wobei die Grössen α_3, α_4, α_5 durch die Gleichungen (114) mit α_0, α_1, α_2

verbunden sind. Man erkennt nun leicht, dass

$$\eta + \alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 1 = -(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

$$\eta + \alpha_3\alpha_4\alpha_5 + 1 = -(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$$

$$= -(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) + \varkappa_1 - \varkappa$$

$$\eta + 1 \qquad = -x\left(x^2-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)x + (\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)\right),$$

also

$$\sqrt{(\eta+\alpha_0\alpha_1\alpha_2+1)(\eta+\alpha_3\alpha_4\alpha_5+1)(\eta+1)}$$

$$= \sqrt{-(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)x(x^2-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)}$$

ist, und dass somit, wenn

$$x^2-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2$$

ein vollständiges Quadrat ist, die Reduction der Quadratwurzel aus einem Polynom 7ten Grades auf eine solche aus einem Polynom dritten Grades geleistet ist, was man natürlich einfacher von der rationalen Substitution ausgehend entwickelt hätte; so wird, wenn ε eine dritte Einheitswurzel bedeutet, und α_0, α_1, α_2 die Lösungen von $x^3 = 1$ sind, endlich $\varkappa_1 = 1$ angenommen wird, die Substitution

$$\eta = -x^3 - 1$$

die Beziehung liefern

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x^6)}} = -\frac{1}{3}\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta+1)(\eta+2)}}.$$

Wählen wir endlich noch eine andere Form der Bedingungsgleichungen für die quadratische Transformation, indem wir mit Beibehaltung aller obigen Bezeichnungen

dem $x = \alpha_0$ die Werthe $\eta = \beta_0$ und β_1
„ $x = \alpha_1$ „ „ $\eta = \beta_0$ und β_2
„ $x = \alpha_2$ „ „ $\eta = \beta_1$ und β_2
„ $x = \alpha_3$ „ „ $\eta = \beta_0$ und β_3
„ $x = \alpha_4$ „ „ $\eta = \beta_1$ und β_3
„ $x = \alpha_5$ „ „ $\eta = \beta_2$ und β_3
„ $x = \alpha_6$ „ „ $\eta = \beta_4$ und β_4 aber nicht verzweigt
„ $x = \infty$ „ „ $\eta = \beta_4$,

endlich dem Werthe $\eta = \infty$ dreimal den Werth $x = \infty$ zuordnen, so sind gegen die früheren Bestimmungen nur die die Punkte α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 betreffenden geändert, und wir erhalten also zunächst wie oben die Form der Transformationsgleichung

$$(121) \quad \eta^2 + (b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\eta + (c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3) = 0$$

mit den drei Bedingungsgleichungen

$$(122)\quad b_0 + b_1\alpha_6 + b_2\alpha_6^2 + b_3\alpha_6^3 = \frac{2c_3}{b_3}$$

$$(123)\quad c_0 + c_1\alpha_6 + c_2\alpha_6^2 + c_3\alpha_6^3 = \frac{c_3^2}{b_3^2}$$

$$(124)\quad (c_3b_1 - c_1b_3) + 2(c_3b_2 - b_3c_2)\alpha_6 = 0.$$

Da nun den Bedingungen gemäss η denselben Werth β_0 für die drei Werthe $x = \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_3$ annehmen soll, so werden die drei Gleichungen bestehen müssen

$$(A)\begin{cases} \beta_0^2 + (b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\alpha_0^2 + b_3\alpha_0^3)\beta_0 + (c_0 + c_1\alpha_0 + c_2\alpha_0^2 + c_3\alpha_0^3) = 0 \\ \beta_0^2 + (b_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_1^2 + b_3\alpha_1^3)\beta_0 + (c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + c_3\alpha_1^3) = 0 \\ \beta_0^2 + (b_0 + b_1\alpha_3 + b_2\alpha_3^2 + b_3\alpha_3^3)\beta_0 + (c_0 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_3^2 + c_3\alpha_3^3) = 0, \end{cases}$$

und daher

$$\begin{vmatrix} 1 & b_0 + b_1\alpha_0 + b_2\alpha_0^2 + b_3\alpha_0^3 & c_0 + c_1\alpha_0 + c_2\alpha_0^2 + c_3\alpha_0^3 \\ 1 & b_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_1^2 + b_3\alpha_1^3 & c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + c_3\alpha_1^3 \\ 1 & b_0 + b_1\alpha_3 + b_2\alpha_3^2 + b_3\alpha_3^3 & c_0 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_3^2 + c_3\alpha_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

somit, wie unmittelbar durch Zerlegung folgt,

$$(b_1c_2 - b_2c_1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix}$$

$$+ (b_2c_3 - b_3c_2)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} + (b_1c_3 - b_3c_1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^3 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder endlich, wie leicht zu sehen, wenn durch $(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_0)$ dividirt wird,

$$(b_1c_2 - b_2c_1) + (b_2c_3 - b_3c_2)(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)$$
$$+ (b_1c_3 - b_3c_1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3) = 0;$$

ebenso folgt vermöge der anderen Bedingungen

$$(b_1c_2 - b_2c_1) + (b_2c_3 - b_3c_2)(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4)$$
$$+ (b_1c_3 - b_3c_1)(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) = 0$$
$$(b_1c_2 - b_2c_1) + (b_2c_3 - b_3c_2)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_5)$$
$$+ (b_1c_3 - b_3c_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5) = 0$$
$$(b_1c_2 - b_2c_1) + (b_2c_3 - b_3c_2)(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_5 + \alpha_4\alpha_5)$$
$$+ (b_1c_3 - b_3c_1)(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = 0,$$

und es ergeben sich somit als Bedingungen zwischen den Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

$$(125) \cdots \cdot \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_3 & \alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_3+\alpha_1\alpha_3 \\ 1 & \alpha_0+\alpha_2+\alpha_4 & \alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_4+\alpha_2\alpha_4 \\ 1 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_5 & \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_5+\alpha_2\alpha_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_3 & \alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_3+\alpha_1\alpha_3 \\ 1 & \alpha_0+\alpha_2+\alpha_4 & \alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_4+\alpha_2\alpha_4 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 & \alpha_3\alpha_4+\alpha_3\alpha_5+\alpha_4\alpha_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Genügen nun die Lösungen diesen beiden Gleichungen (125), so sind damit die Verhältnisse der drei Grössen

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad b_3 c_1 - b_1 c_3$$

gegeben, somit nach (124) auch α_6 in der Form bestimmt:

$$(126) \cdots \cdot \alpha_6 = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{2(b_2 c_3 - c_2 b_3)},$$

und durch passende Wahl von b_0 und c_0 kann man endlich die beiden Gleichungen (122) und (123) befriedigen; *die zu den durch die Gleichungen* (125) *und* (126) *definirten Grössen* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_6$ *gehörigen Irrationalitäten definiren somit im Allgemeinen hyperelliptische Integrale zweiter Ordnung, welche auf solche erster Ordnung zurückführbar sind, falls die in den Grössen* $1, \beta_0, \beta_0^2$ *linearen Gleichungen* (A) *so wie die analogen für die zu bestimmenden Unbekannten quadratische Verhältnisse liefern.*

§ 13.

Reductionsformen von Integralen linearer Differentialgleichungen, welche additiv aus Producten von algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt sind.

Nachdem im § 11 die Form solcher Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen beliebiger Ordnung untersucht worden, welche sich in *additiver Weise* aus algebraischen, logarithmischen Functionen und Integralen algebraischer Functionen zusammensetzen, wollen wir allgemeinere Zusammensetzungen solcher Functionsarten untersuchen, wie sie in der That bei linearen Differentialgleichungen vorkommen; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x$$

das Integral $z = x^2 \log x$, und die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = \frac{2}{x}$$

das Integral $z = x + x(\log x)^2$.

Habe also die nicht homogene, lineare Differentialgleichung

$$(127) \quad \ldots \quad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

ein algebraisch-logarithmisches Integral von der Form

$$(128) \quad \ldots \quad z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho$$

$$= u + \sum_1^\varrho {}^\alpha u_\alpha \log v_\alpha ,$$

worin $u, u_1, u_2, \cdots u_\varrho, v_1, v_2, \cdots v_\varrho$ algebraische Functionen von x bedeuten, dann wird, wenn dieser Werth von z in (127) eingesetzt wird, wegen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} + \sum_1^\varrho {}^\alpha \frac{u_\alpha}{v_\alpha} \frac{dv_\alpha}{dx} + \sum_1^\varrho {}^\alpha \frac{du_\alpha}{dx} \log v_\alpha$$

. . . .

die Differentialgleichung (127) in

$$(129) \quad F(x) + \sum_1^\varrho {}^\alpha \left(\frac{d^m u_\alpha}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_\alpha}{dx^{m-1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + Y_{m-1} \frac{du_\alpha}{dx} + Y_m u_\alpha \right) \log v_\alpha = y$$

übergehen, worin $F(x)$ eine algebraische Function bedeutet; nimmt man nun an, dass zwischen den in der Integralform (128) vorkommenden Logarithmen keine lineare Relation von der Form

$$P_1 \log v_1 + P_2 \log v_2 + \cdots + P_\varrho \log v_\varrho = Q$$

existirt, in welcher $P_1, P_2, \cdots P_\varrho, Q$ algebraische Functionen von x bedeuten, indem wir im entgegengesetzten Falle einen der Logarithmen linear durch die anderen $\varrho - 1$ ausdrücken und in (128) einsetzen könnten, so wird, da die Gleichung (129) eine solche lineare Relation liefert, nothwendig der Coefficient eines jeden Logarithmus verschwinden, also

$$\frac{d^m u_\alpha}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_\alpha}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{du_\alpha}{dx} + Y_m u_\alpha = 0$$

sein müssen, und es folgt somit der Satz, *dass, wenn eine Differentialgleichung*

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

ein Integral von der Form

$$z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho$$

besitzt, in welchem $u, u_1, u_2, \cdots v_1, v_2, \cdots$ algebraische Functionen von x bedeuten, und die Logarithmen nicht mehr in einer linearen

Beziehung mit algebraischen Coefficienten stehen, die Coefficienten der Logarithmen $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ algebraische Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung sein müssen.

Es mag bemerkt werden, dass, wenn $\varrho > m$ ist, nothwendig, da $u_1, u_2, \ldots u_m, u_{m+1}$ algebraische Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung sein müssen, eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten von der Form

$$n_1 u_1 + n_2 u_2 + \cdots + n_m u_m + n_{m+1} u_{m+1} = 0$$

bestehen wird.

Gehen wir wieder zu dem Integrale (128) zurück und lassen x einen solchen Umlauf machen, dass $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ und y ihre Ausgangswerthe wieder annehmen*), während u in u', u_α in u'_α, v_α in v'_α

---

*) Zur Erläuterung des Obigen und ähnlicher Schlüsse im Früheren mag hier auf rein algebraischem Wege — es geschieht ebenso leicht auf functionentheoretischem — der Satz bewiesen werden, dass man in einer mit Adjungirung der algebraisch irreductibeln Functionen $y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ irreductibeln algebraischen Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades

$$\text{(a)} \quad \ldots f(z, x, y_1, y_2, \ldots y_\varrho) = 0$$

durch geschlossene Umläufe von x, welche $y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ unverändert lassen, zu allen Lösungen der Gleichung $z_1, z_2, \ldots z_\varkappa$ gelangen kann, und es genügt offenbar nachzuweisen, dass, wenn eine Function z für alle geschlossenen Umläufe der Variabeln, welche $y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ unverändert lassen, die r verschiedenen Werthe $z_1, z_2, \ldots z_r$ annimmt, diese die Lösungen einer irreductibeln algebraischen Gleichung r^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational au[s] $x, y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ zusammengesetzt sind, indem, wenn man in (a) durch ge[-]schlossene Umläufe nicht zu allen Werthen von z gelangen würde, ein Theil d[er] Lösungen dieser irreductibeln Gleichung einer Gleichung niederen Grades v[on] demselben Charakter angehören würde. Bildet man in bekannter Weise z[um] Zwecke jenes Nachweises eine Function t durch die in den Grössen $y_1, y_2, \ldots$ lineare mit constanten Coefficienten versehene Beziehung

$$t = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_\varrho y_\varrho,$$

so wird bekanntlich jede andere mit willkürlichen constanten Coefficienten [...]sehene lineare Function derselben Grössen als ähnliche Function der e[...] durch t ausdrückbar sein mit Hülfe der Coefficienten der[...] deren Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ sind, d. h. mi[...] man nun ϱ solcher linearer Beziehun[gen] ... Grössen $y_1, y_2, \ldots y_\varrho$ ...ene Umkre[...]

übergehen mögen, so wird offenbar durch den Ausdruck

$$z = u' + u_1' \log v_1' + u_2' \log v_2' + \cdots + u_\varrho' \log v_\varrho'$$

die Differentialgleichung (127) wiederum befriedigt werden, denn die Gleichung (129), aus welcher die Summe der Logarithmen herausfiel, enthält in der Function $F(x)$ nur rationale Verbindungen der u- und v-Grössen, da nur diese selbst oder ihre Ableitungen, die ja wieder durch diese Grössen rational ausdrückbar sind, in jener vorkommen, während $Y_1, \cdots Y_m, y$ unverändert bleiben sollten, und es werden offenbar auch $u_1', u_2', \cdots u_\varrho'$ algebraische Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung sein; und dies wird für alle Wertheverbindungen von u und v gelten, welche denselben geschlossenen Umläufen von x entsprechen, für welche die Grössen $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y$ ihre Ausgangswerthe wieder annehmen; sämmtliche so entstehenden Werthe von z werden particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung (127) sein, und die Coefficienten der

---

die geschlossenen Umläufe von x, welche t die verschiedenen δ Werthe geben $t_1, t_2, \cdots t_\delta$ — worin δ der Grad der in x irreductibeln Gleichung für t bezeichnet — die δ verschiedenen Werthe $w_1, w_2, \cdots w_\delta$ annimmt. Es wird somit

$$w_1 t_1^\lambda + w_2 t_2^\lambda + \cdots + w_\delta t_\delta^\lambda$$

für jeden geschlossenen Weg von x unverändert bleiben, sich somit als rationale Function von x darstellen lassen; bekannte Schlüsse führen, wenn man $\lambda = 0, 1, 2, \cdots \delta - 1$ setzt, zu dem Resultat, dass w sich als rationale Function von x und t ausdrücken lässt. Aber der für w festgesetzten Bedingung leistet

$$w = z_1^\mu + z_2^\mu + \cdots + z_r^\mu$$

Genüge, da sich diese Function der Voraussetzung nach für geschlossene Umläufe des x, welche $y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ unverändert lassen, selbst nicht ändert, und wird sich daher als rationale Function von x und t oder von $x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ ausdrücken lassen; es bilden somit $z_1, z_2, \cdots z_r$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung r^{ten} Grades, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, y_2 \cdots y_\varrho$ zusammengesetzt sind. Wäre nun diese Gleichung eine mit Adjungirung der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ reductible, so müsste einer ihrer rationalen Factoren

$$f_1(z, x, y_1, y_2, \cdots y_\varrho)$$

für einige jener z-Werthe verschwinden, und lässt man nun x alle geschlossenen Umläufe machen, welche $y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ unverändert lassen, so wird f_1 immer identisch Null bleiben müssen, während z der Reihe nach alle r Werthe $z_1, z_2, \cdots z_r$ annimmt, d. h. die Gleichung $f_1 = 0$ wird r Lösungen haben, also nicht ein rationaler Factor jener Gleichung r^{ten} Grades sein können.

Es mag bei dieser Gelegenheit noch bemerkt werden, dass die Abel angehörige Schlussweise von der Bildung der t-Function nur der algebraische Ausdruck dafür ist, dass eine algebraische Function oder eine Riemann'sche Fläche gebildet wird, welche alle Verzweigungen der einzelnen Functionen besitzt und durch die sich somit die einzelnen Functionen nach einem bekannten Riemann'schen Satze rational ausdrücken lassen.

Logarithmen stets algebraische particuläre Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung. Um festzustellen, welche Wertheverbindungen der u und v in die so successive entstehenden particulären Integrale eintreten werden, braucht man wieder nur eine Grösse t zu wählen, durch welche sich die Grössen $u, u_1, u_2, \cdots u_\varrho$, $v_1, v_2, \cdots v_\varrho$ mit Hülfe der Grössen $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y$, wie in der Anmerkung näher ausgeführt wird, rational ausdrücken lassen, und die sämmtlichen Werthe der u- und v-Grössen zu wählen, welche den Lösungen derjenigen irreductibeln algebraischen Gleichung entsprechen, deren eine Lösung t ist. Sei die irreductible Gleichung in t wieder vom δ^{ten} Grade, deren Lösungen $t, t_1, \cdots t_{\delta-1}$, und die dem Werthe t_α von t entsprechenden Werthe von $u, u_1, \cdots v_1, \cdots$

$$u^{(\alpha)}, u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, \cdots u_\varrho^{(\alpha)}, \ v_1^{(\alpha)}, v_2^{(\alpha)}, \cdots v_\varrho^{(\alpha)},$$

endlich der entsprechende Ausdruck von z z_α, so wird, da

$$z = u + \log v_1^{u_1} + \log v_2^{u_2} + \cdots + \log v_\varrho^{u_\varrho}$$

ist, der Ausdruck

$$(130) \cdots\cdot \frac{z + z_1 + z_2 + \cdots + z_{\delta-1}}{\delta} = \frac{1}{\delta}\sum_0^{\delta-1}{}_\alpha u^{(\alpha)}$$

$$+ \frac{1}{\delta}\log\left(v_1^{u_1} v_1^{(1)u_1^{(1)}} \cdots v_1^{(\delta-1)u_1^{(\delta-1)}}\right) + \frac{1}{\delta}\log\left(v_2^{u_2} v_2^{(1)u_2^{(1)}} \cdots v_2^{(\delta-1)u_2^{(\delta-1)}}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\delta}\log\left(v_\varrho^{u_\varrho} v_\varrho^{(1)u_\varrho^{(1)}} \cdots v_\varrho^{(\delta-1)u_\varrho^{(\delta-1)}}\right)$$

bekanntlich wieder ein Integral der Differentialgleichung (127) sein, worin die einzelnen algebraischen Functionen rationale Functionen der t sind, welche die Lösungen einer irreductibeln algebraischen Gleichung δ^{ten} Grades vorstellen, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y$ zusammengesetzt sind. Der Ausdruck $\sum u^{(\alpha)}$ ist jedenfalls eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_m, y$; nehmen wir nun an, dass die Grössen $u_1, u_2, \cdots u_\varrho$ rational aus $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ zusammengesetzte Functionen sind — was also z. B. immer eintritt wenn die reducirte lineare Differentialgleichung nur aus jenen Grösse[n] $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ rational zusammengesetzte algebraische Integral[e] besitzt — so wird

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(2)} = \cdots = u_\alpha^{(\delta-1)}$$

sein, und da $v_\alpha v_\alpha^{(1)} \cdots v_\alpha^{(\delta-1)}$ als rationale symmetrische Functi[on] der Lösungen der t-Gleichung rational durch $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ a[us]drückbar ist, so wird die vorgelegte nicht homogene lineare Diffe[rential-]

tialgleichung nach (130) ein Integral von der Form haben

$$z = U + \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \frac{u_2}{\delta} \log V_2 + \cdots + \frac{u_\varrho}{\delta} \log V_\varrho,$$

worin $U, u_1, \cdots u_\varrho, V_1, \cdots V_\varrho$ rational aus $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ zusammengesetzt sind.

Hat also eine lineare nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form

$$z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho,$$

worin $u, u_1, \cdots u_\varrho, v_1, \cdots v_\varrho$ algebraische Functionen bedeuten, und die Functionen $u_1, u_2, \cdots u_\varrho$ sind rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar, so besitzt die Differentialgleichung auch stets ein Integral von der Form

$$z = U + \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \frac{u_2}{\delta} \log V_2 + \cdots + \frac{u_\varrho}{\delta} \log V_\varrho,$$

worin δ eine positive ganze Zahl und $U, V_1, V_2, \cdots V_\varrho$ ebenfalls rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind.

So hat die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)}$$

das allgemeine Integral

$$z = x \log (1 + x^{\frac{1}{2}}) + cx,$$

indem die reducirte Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$$

nur die rationalen algebraischen Integrale $z = cx$ besitzt, während die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = \frac{1}{2}$$

das Integral

$$z_1 = x \log \sqrt{x},$$

also auch das Integral

$$z_2 = x \log (-\sqrt{x}),$$

und somit auch das Integral

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{x}{2} \log (-x)$$

hat.

Es bedarf kaum einer näheren Auseinandersetzung, dass ähnliche Sätze gelten für Integrale linearer Differentialgleichungen, welche

die Form haben

$$(131) \cdots z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_\varkappa \log v_\varkappa$$
$$+ w_1 \int^{\xi_1} y_1\, ds + w_2 \int^{\xi_2} y_2\, ds + \cdots + w_\lambda \int^{\xi_\lambda} y_\lambda\, ds,$$

worin $u, u_1, \cdots u_\varkappa, v_1, v_2 \cdots v_\varkappa, w_1, w_2, \cdots w_\lambda, \xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\lambda$ algebraische Functionen von x, und $y_1, y_2 \cdots y_\lambda$ ebensolche von s bedeuten, und es wird genau so geschlossen werden können, dass, *wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form* (131) *besitzt, und die Functionen $u_1, u_2, \cdots u_\varkappa, w_1, w_1, \cdots w_\lambda$ sind rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar, die Differentialgleichung auch stets ein Integral von der Form hat*

$$z = U + \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \cdots + \frac{u_\mu}{\delta} \log V_\mu$$
$$+ \frac{w_1}{\delta} \sum_1^{p_1}{}^{\varrho} \int^{\eta_1^{(\varrho)}} y_1\, ds + \cdots + \frac{w_\lambda}{\delta} \int^{\eta_\lambda^{(\varrho)}} y_\lambda\, ds,$$

in welchem $U, V_1, \cdots V_\mu$ rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung sind, während $\eta_\alpha^{(\varrho)}$ die Lösungen einer Gleichung p_α^{ten} Grades bedeuten, deren Coefficienten rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, und für welche die diesen Grenzen zugehörigen Irrationalitäten durch eben diese Grenzen und die Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbar sind; ferner ist unmittelbar zu erkennen, dass unter der Annahme, dass nicht zwischen den im Integrale (131) *vorkommenden Logarithmen und Abel'schen Integralen lineare Beziehungen mit algebraischen Coefficienten stattfinden, die Grössen $u_1, u_2, \cdots u_\varkappa, w_1, w_2, \cdots w_\lambda$ algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung sein werden.*

Nachdem wir oben lineare nicht homogene Differentialgleichungen kennen gelernt, für welche ein Integral aus multiplicativen Zusammensetzungen von algebraischen Functionen mit logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen besteht, wollen wir die Frage allgemein aufwerfen, welcher Natur die Zusammensetzung eines solchen Integrales aus algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen — indem wir die Logarithmen auch als Integrale algebraischer Functionen auffassen — überhaupt sein muss, wenn die Grenzen der Abel'schen Integrale algebraische Functionen der Variabeln sein sollen. Sei also ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung

$$(132) \cdots z_1 = f\left(x, \int^{v_1} y_1\, ds, \int^{v_2} y_2\, ds, \cdots \int^{v_\varrho} y_\varrho\, ds\right),$$

in welchem $v_1, v_2, \cdots v_\varrho$ algebraische Functionen von x, und $y_1, y_2, \cdots y_\varrho$ ebensolche von s bedeuten sollen; bildet man aus (132) die successiven Differentialquotienten $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \cdots \frac{d^m z_1}{dx^m}$, in welchen die Ableitungen der Abel'schen Integrale sämmtlich algebraische Functionen von x werden, und setzt alle diese Werthe in die Differentialgleichung (127) ein, so erhält man, wenn

$$(133) \cdots\cdot \zeta_1 = \int^{v_1} y_1\, ds, \quad \zeta_2 = \int^{v_2} y_2\, ds, \cdots \zeta_\varrho = \int^{v_\varrho} y_\varrho\, ds$$

gesetzt, $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho$ also als particuläre Integrale der resp. Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(134) \cdots\cdot \frac{d\zeta}{dx} = (y_1)_{v_1} \frac{dv_1}{dx}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = (y_2)_{v_2} \frac{dv_2}{dx}, \cdots \frac{d\zeta}{dx} = (y_\varrho)_{v_\varrho} \frac{dv_\varrho}{dx}$$

betrachtet werden, eine algebraische Gleichung

$$(135) \cdots\cdot F(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho) = 0$$

zwischen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho$. Nimmt man nun an, dass zwischen den Integralen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho$ unter einander eine algebraische Beziehung nicht besteht — indem man im entgegengesetzten Falle die Anzahl der Integrale im Ausdrucke (132) von vornherein kleiner annehmen dürfte — so muss die Gleichung (135) identisch sein und also auch bestehen, wenn $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho$ durch die Grössen ersetzt werden

$$\zeta_1 + \mu_1, \quad \zeta_2 + \mu_2, \cdots \zeta_\varrho + \mu_\varrho,$$

worin $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten, und da die Ableitungen dieser Grössen auch den Gleichungen (134) genügen, so folgt, dass der dem Ausdrucke (132)

$$(136) \cdots\cdot z_1 = f(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\varrho)$$

analoge Ausdruck

$$(137) \cdots\cdot z_2 = f(x, \zeta_1 + \mu_1, \zeta_2 + \mu_2, \cdots \zeta_\varrho + \mu_\varrho)$$

wiederum ein particuläres Integral der Differentialgleichung (127) sein wird — ein Resultat das wir auch aus den im zweiten Kapitel bewiesenen Sätzen von der Erhaltung der algebraischen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen (127) und (134) hätten entnehmen können. Seien nun

$$z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots z^{(m)}$$

m particuläre Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung

$$(138) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = 0,$$

so ist jedes Integral der Gleichung (127) in der Form enthalten

$$z = z_1 + M_1 z^{(1)} + M_2 z^{(2)} + \cdots + M_m z^{(m)},$$

$M_1, M_2, \dots M_m$ Constanten bedeuten, und somit

$$(139) \;\dots\; z_2 = z_1 + \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)}.$$

Aus (136), (137) und (139) folgt

$$(140) \;\dots\; f(x, \zeta_1 + \mu_1, \zeta_2 + \mu_2, \dots \zeta_\varrho + \mu_\varrho) = f(x, \zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\varrho) + \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)}$$

für jedes Werthesystem der Grössen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho$ und dazugehörige $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$; machen wir nun die Annahme, dass die Function f nicht schon eine lineare Function der Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\varrho$ ist — welche Form wir auch im allgemeinen Falle unter gewissen, gleich anzugebenden Beschränkungen erhalten werden — so wird man für die willkürlichen Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho$ m solche Werthecomplexe wählen können, dass die durch Einsetzen dieser Werthe von μ und der entsprechenden von ν aus (140) hervorgehenden m Gleichungen die m Grössen $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(m)}$ algebraisch durch die Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\varrho$ bestimmen werden. Machen wir nun die Annahme, dass die Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung (138) nicht algebraische Functionen derjenigen Abel'schen Integrale sind, welche in dem Integrale (132) der nicht homogenen Differentialgleichung enthalten sind, so muss die Gleichung (140) eine in den Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\varrho$ identische sein, und setzt man daher

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_\varrho = 0,$$

so folgt

$$(141) \;\dots\; f(x, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho) = f(x, 0, 0, \dots 0) + \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)},$$

woraus sich $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(m)}$, indem man wieder m Werthecombinationen der μ wählt, in welchen die f-Function der Annahme nach nicht linear ist, als algebraische Functionen ergeben würden. Vermöge (141) geht nun die Gleichung (140) in die Beziehung über

$$(142) \;\dots\; f(x, \zeta_1 + \mu_1, \dots \zeta_\varrho + \mu_\varrho) = f(x, \zeta_1, \dots \zeta_\varrho) - f(x, 0, \dots 0) + f(x, \mu_1, \dots \mu_\varrho),$$

woraus wieder, weil dieselbe vermöge der Irreductibilität der Abel'schen Integrale in den ζ-Grössen identisch sein muss, aus bekannten Gründen folgt, dass

$$(143) \;\dots\; f(x, \zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\varrho) = u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + \dots + u_\varrho \zeta_\varrho + u$$

ist, worin $u_1, u_2, \dots u_\varrho, u$ algebraische Functionen von x bedeuten, welche nach (141) mit den Fundamentalintegralen der reducirten Differentialgleichung durch die Beziehung verbunden sind

$$\dots \mu_1 + u_2 \mu_2 + \dots + u_\varrho \mu_\varrho = \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)};$$

es geht daher (136) über in

$$z_1 = u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + \cdots + u_\varrho \zeta_\varrho + u$$

oder

$$(145) \cdots \cdot z_1 = u_1 \int^{v_1} y_1 \, ds + u_2 \int^{v_2} y_2 \, ds + \cdots + u_\varrho \int^{v_\varrho} y_\varrho \, ds + u,$$

und es werden wieder, wie schon unmittelbar aus der Gleichung (144) hervorgeht, die algebraischen Functionen $u_1, u_2, \cdots u_\varrho$ particuläre algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung sein.

Wir finden somit, *dass, wenn eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein aus der Variabeln und Abel'schen Integralen algebraisch zusammengesetztes Integral besitzt, unter der Voraussetzung, dass die Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung nicht algebraische Functionen derselben Abel'schen Integrale sind, dieses Integral eine lineare Function jener Abel'schen Integrale sein muss, deren Coefficienten algebraische Functionen der Variabeln sind.*

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x,$$

deren reducirte Gleichung $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 0$ das allgemeine algebraische Integral $z = cx^2$ besitzt, das algebraisch-logarithmische Integral

$$z_1 = x^2 \log x.$$

Lassen wir jedoch die Voraussetzung fallen, dass die Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung nicht algebraische Functionen derjenigen Abel'schen Integrale sind, welche in dem Integrale der nicht homogenen Differentialgleichung enthalten sind, so wird man nicht mehr schliessen können, dass z eine lineare Function jener Abel'schen Integrale sein muss, wie dies auch in der That nicht der Fall ist; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = \frac{2}{x},$$

deren reducirte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = 0$$

die beiden particulären Integrale

$$z^{(1)} = x \quad \text{und} \quad z^{(2)} = x \log x$$

besitzt, das particuläre Integral

$$z = x + x (\log x)^2.$$

§ 14.

Eigenschaften der algebraischen Grenzen solcher Integrale linearer Differentialgleichungen, welche aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt sind.

Wir haben bisher die Frage behandelt, was aus der Annahme eines Integrales einer linearen Differentialgleichung, das sich aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammensetzt, geschlossen werden kann für die Beschaffenheit anderer ähnlicher, nothwendig existirender Integrale eben dieser Differentialgleichung; wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, was sich unter gewissen Bedingungen von den Eigenschaften eines *jeden* Integrales einer linearen Differentialgleichung aussagen lässt, welches wieder aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt ist — zwei Fragen, welche für die einfachste Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y,$$

also für Quadraturen zusammenfallen, da die Integrale sich nur um Constanten unterscheiden.

Hat die lineare Differentialgleichung

$$(146) \cdots \quad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

ein algebraisches Integral z_1, das als Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung dargestellt sein mag, deren Coefficienten rational aus x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y zusammengesetzt sein sollen, so wird, wenn z_2 irgend eine andere Lösung dieser algebraischen Gleichung bezeichnet, aus früher entwickelten Gründen z_2 ebenfalls jener Differentialgleichung genügen, woraus die beiden Beziehungen

$$\frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_1 = y$$

$$\frac{d^m z_2}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_2 = y$$

folgen, und hieraus wieder

$$(147) \cdots \quad \frac{d^m (z_1 - z_2)}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} (z_1 - z_2)}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m (z_1 - z_2) = 0,$$

d. h. es wird $z_1 - z_2$ ein algebraisches Integral der reducirten Differentialgleichung sein. Hat nun die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche algebraische Integrale,

welche rational durch die Grössen $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y ausdrückbar sind, so muss im ersteren Falle $z_1 - z_2 = 0$ sein, was der Irreductibilität der die Grössen z_1 und z_2 definirenden algebraischen Gleichung widerspricht, und im zweiten Falle müsste

$$(148) \cdots . \; z_2 = z_1 + F(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y)$$

sein, worin F eine rationale Function bedeutet; aber dann würden, wenn jene algebraische Gleichung

$$(149) \; z^{\varkappa} + \varphi_1(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y) z^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_{\varkappa}(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y) = 0$$

lautet, worin die φ ebenfalls rationale Zusammensetzungen ausdrücken, die beiden Gleichungen bestehen

$$z_1^{\varkappa} + \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_m, y) z_1^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_{\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_m, y) = 0$$

und

$$\left(z_1 + F(x, Y_1, \cdots Y_m, y)\right)^{\varkappa}$$
$$+ \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_m, y)\left(z_1 + F_1(x, Y_1, \cdots Y_m, y)\right)^{\varkappa-1} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_m, y) = 0,$$

aus denen durch Subtraction

$$\varkappa \cdot F(x, Y_1, \cdots Y_m, y) z_1^{\varkappa-1} + \cdots = 0$$

folgt, es würde also z_1 einer Gleichung $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Grades genügen mit Coefficienten, welche rational in $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ ausdrückbar sind, was wieder wegen der Irreductibilität der Gleichung (149) unmöglich ist. Besteht also die oben gemachte Annahme für die reducirte Differentialgleichung, so darf die Gleichung (149) nur *eine* Wurzel haben, muss also linear sein, und es wird somit das vorgelegte algebraische Integral z_1 rational durch $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y$ ausdrückbar sein. Wir erhalten also folgenden Satz:

Hat eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein algebraisches Integral, und die reducirte Differentialgleichung hat entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche, welche rational aus den Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung zusammengesetzt sind, so wird sich das Integral der nicht homogenen Differentialgleichung als rationale Function der Coefficienten derselben darstellen lassen.

So hat die Differentialgleichung

$$(150) \cdots \frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = \sqrt{x},$$

da ihre reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = 0$$

das allgemeine, in den Coefficienten der Gleichung (150) rationale Integral $z = \frac{c}{\sqrt{x}}$ besitzt, das in eben diesen Coefficienten rationale Integral

$$z = \frac{1}{2} x \sqrt{x}.$$

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn $Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ ganze Functionen von x sind, die reducirte lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten überall eindeutig und in der Endlichkeit endlich sind, nach den Untersuchungen von Fuchs, bekanntlich nur solche algebraische Integrale besitzen kann, welche in der Endlichkeit überall endlich und eindeutig, also ganze Functionen sind; es ist somit der obigen Bedingung, dass die etwaigen algebraischen Integrale rationale Functionen der Coefficienten der nicht homogenen Differentialgleichung sein sollen, von selbst genügt, und wir erhalten den Satz:

Hat eine lineare nicht homogene Differentialgleichung, für welche die Coefficienten der linken Seite sämmtlich ganze Functionen der Variabeln sind, überhaupt ein algebraisches Integral, so ist dieses stets als rationale Function von x und der rechten Seite der Differentialgleichung y ausdrückbar,

ein Satz, der sich auch unmittelbar aus der Integrationsmethode mit Hülfe der Variation der Constanten und dem Abel'schen Satze, die algebraischen Werthe von Integralen algebraischer Functionen betreffend, herleiten lässt.

Wir können aber den oben bewiesenen Satz noch in anderer Weise begründen und aussprechen. Bildet man nämlich mit einer algebraischen Function z und beliebigen algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ den in z und den Ableitungen dieser Grösse linearen Ausdruck

$$(151) \cdots\cdot Z = \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z,$$

so ist dieser bekanntlich als rationale Function von $z, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und einer willkürlich angenommenen algebraischen Function y darstellbar, wenn wir uns z als die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades vorstellen, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y zusammengesetzt sind, so dass

$$(152) \quad Z = \psi_1(x, Y_1, \cdots Y_m, y) z^{\varkappa-1} + \psi_2(x, Y_1, \cdots Y_m, y) z^{\varkappa-2} + \cdots \\ \cdots + \psi_\varkappa(x, Y_1, \cdots Y_m, y)$$

wird, wenn die ψ rationale Functionen bedeuten. Stellt man nun diesen Ausdruck mit der die Grösse z definirenden Gleichung

$$(153) \quad z^\varkappa + \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_m, y) z^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_\varkappa(x, Y_1, \cdots Y_m, y) = 0$$

zusammen, so haben die beiden Gleichungen jedenfalls *eine* z-Grösse gemein; haben sie *nur* eine gemein, so würde die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers bereits z als rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ und Z liefern; ist dagegen der grösste gemeinschaftliche Theiler von höherem Grade, so müssten mehrere Werthe von z z. B. z_1 und z_2 dem Ausdrucke Z denselben Werth ertheilen. Nehmen wir nun aber an, dass entweder überhaupt nicht zwei z-Werthe existiren, welche dem Ausdrucke Z denselben Werth ertheilen oder dass, wenn solche existiren, diese sich nur um eine in $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ rationale Function unterscheiden können, so würde aus der ersten Annahme unmittelbar, aus der zweiten auf Grund des oben bewiesenen Satzes, dass zwei Lösungen der irreductibeln Gleichung (153) sich nicht nur um eine Function unterscheiden können, welche rational aus $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ zusammengesetzt ist, folgen, dass jener grösste gemeinschaftliche Theiler nur vom ersten Grade sein kann, und daher z mit Hülfe von $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ rational durch Z ausdrückbar sein; es folgt also der Satz, *dass, wenn z die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung ist, deren Coefficienten rational aus x und willkürlichen algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1, y_2, \cdots y_n$ zusammengesetzt sind, und der Ausdruck*

$$Z = \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z$$

nimmt überhaupt nicht für zwei Lösungen dieser Gleichung denselben Werth an oder nur für solche, deren Differenz eine rationale Function der Grössen $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1, y_2, \cdots y_n$ ist, so muss sich z rational durch $x, Y_1, \cdots Y_m, y_1, y_2, \cdots y_n$ und Z *ausdrücken lassen,* und es ist unmittelbar zu sehen, dass dieser Satz nur eine andere Ausdrucksweise des früheren ist, weil, wenn zwei Werthe z_1 und z_2 dem Werthe Z denselben Werth ertheilen, $Z = 0$ nothwendig das Integral $z_1 - z_2$ hat, und Z das frühere y der Gleichung (146) ist.

Von diesem Gesichtspunkte aus können wir aber offenbar den Satz auch allgemeiner so aussprechen:

Ist z die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1, y_2, \cdots y_n$ zusammengesetzt sind, und nimmt der Ausdruck

$$Z = F\left(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right),$$

worin F eine rationale Function bedeutet, überhaupt nicht für zwei Lösungen dieser Gleichung denselben Werth an oder nur für solche, deren Differenz eine rationale Function der Grössen $x, Y_1, \cdots Y_m, y_1, \cdots y_n$

ist, so muss sich z *rational durch* x, $Y_1, \cdots Y_m$, $y_1, \cdots y_n$ *und* Z *ausdrücken lassen.*

Nehmen wir nunmehr an, dass die Differentialgleichung (146) ein logarithmisches Integral von der Form

$$(154) \cdots\cdots z_1 = A \log v$$

habe, worin A eine Constante und v eine algebraische Function ist, welche der irreductibeln algebraischen Gleichung genügt

$$(155)\ f(v) = v^\lambda + \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_m, y)v^{\lambda-1} + \cdots + \varphi_\lambda(x, Y_1, \cdots Y_m, y) = 0,$$

so wird, wie früher gezeigt worden, $Y_m = 0$ sein müssen, und wenn $v, v_1, v_2, \cdots v_{\lambda-1}$ die Lösungen der Gleichung (155) sind, so werden bekanntlich auch $A \log v_1$, $A \log v_2, \cdots A \log v_{\lambda-1}$ Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein. Ist nun die Gleichung (155) von einem höheren Grade als dem ersten, so würde, weil $A \log v$ und $A \log v_1$ Integrale der Gleichung (146) sind, der Ausdruck

$$A \log \frac{v}{v_1}$$

ein Integral der reducirten linearen Differentialgleichung sein. Hat die letztere nun, vom constanten Integrale abgesehen, gar kein logarithmisches Integral dieser Form, so muss die algebraische Gleichung (155) nothwendig vom ersten Grade gewesen sein, d. h. der Logarithmand v des angenommenen logarithmischen Integrales ist eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$. Nehmen wir zweitens an, die reducirte Differentialgleichung habe logarithmische Integrale dieser Form, aber nur solche, deren Logarithmand rational durch $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrückbar ist; dann würde folgen, dass $v_1 = vr$ ist, worin r den rationalen Charakter hat, und somit nach (155)

$$f(v_1) = f(vr) = 0$$

sein, woraus sich wegen der Irreductibilität der Gleichung offenbar auch

$$f(vr^2) = 0 \quad f(vr^3) = 0, \cdots$$

ergiebt, so dass einmal $vr^\delta = v$, d. h. $r^\delta = 1$ sein muss, somit r eine Constante und zwar eine δ^{te} Einheitswurzel; es nimmt daher die Gleichung (155) die Form an

$$(156) \cdots\cdots v^{\mu\delta} + \varphi_\delta(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)\, v^{(\mu-1)\delta} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{\mu\delta}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0.$$

Setzt man nun

$$v^\delta = V,$$

so wird nach (154) das Integral z_1 übergehen in

$$(157) \cdots\cdots z_1 = \frac{A}{\delta} \log V,$$

worin V nach (156) durch die Gleichung definirt ist

$$(158) \cdots\cdots V^\mu + \varphi_\delta(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) V^{\mu-1} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{\mu\delta}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0,$$

deren Grad μ kleiner als der Grad m der die Function v definirenden Gleichung (155) ist. Ist nun $\mu > 1$, so kann man genau ebenso das Integral z_1 in die Form setzen

$$z_1 = \frac{A}{\delta\delta_1} \log W,$$

worin W einer Gleichung μ_1^{ten} Grades von der Form genügt

$$W^{\mu_1} + \psi_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) W^{\mu_1-1} + \cdots + \psi_{\mu_1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0,$$

in welcher $\mu_1 < \mu$ ist; setzen wir dieses Verfahren fort, so müssen wir zu einem logarithmischen Ausdrucke für das Integral z_1 gelangen, dessen Logarithmand durch eine lineare Gleichung definirt ist, also rational durch $x, Y_1 \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrückbar ist. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hat eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein logarithmisches Integral von der Form

$$A \log v,$$

worin A eine Constante und v eine algebraische Function von x ist, so lässt sich dieses, wenn die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein logarithmisches Integral dieser Form besitzt oder nur solche, deren Logarithmand rational aus den Coefficienten der nicht homogenen Differentialgleichung zusammengesetzt ist, in die Form

$$\frac{A}{m} \log W$$

bringen, worin m eine ganze positive Zahl und W eine in den Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbare Function bedeutet.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} = x,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} = 0$$

das allgemeine, nicht logarithmische Integral besitzt:

$$z = c\int x^{-1} e^{-\frac{x^3}{3}} dx + c_1,$$

das Integral

$$z = \log x.$$

Nach den früheren Auseinandersetzungen ist unmittelbar einleuchtend, dass der oben ausgesprochene Satz auch gültig ist, wenn das logarithmische Integral die Form hat

$$z = u \log v,$$

worin v eine algebraische, u eine in $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ rationale Function bedeutet, es wird sich also auch dann dieses Integral stets in die Form setzen lassen

$$z = \frac{u}{m} \log w,$$

worin m eine ganze Zahl, und w eine in den Coefficienten der Differentialgleichung rationale Function bedeutet; und ein ähnlicher Satz gilt offenbar auch, wenn das Integral von der Form

$$z = U + u \log v$$

ist, worin v und U algebraische Functionen der Variabeln, und u eine rationale Function der Coefficienten der Differentialgleichung bedeuten, wie man leicht folgern kann, wenn man wieder wie oben eine Hülfsgrösse t einführt, durch welche sich v und U mit Hülfe der Grössen $x, Y_1, Y_2 \cdots Y_m, y$ rational ausdrücken lassen.

Habe jetzt die lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form

$$(159) \cdots\cdot z_1 = u \int^v Y ds,$$

in welchem u und v algebraische Functionen von x, und Y eine algebraische Function von s bedeutet, so möge auf die Differentialgleichung (146) die Substitution ausgeübt werden

$$(160) \cdots\cdot z = u \int t\, dx,$$

dann geht dieselbe, da u nach früheren Auseinandersetzungen ein particuläres Integral der reducirten Differentialgleichung

$$(161) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = 0$$

sein musste, bekanntlich in eine lineare nicht homogene Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung in t über von der Form

$$(162) \cdots\cdot \frac{d^{m-1} t}{dx^{m-1}} + Z_1 \frac{d^{m-2} t}{dx^{m-2}} + \cdots + Z_{m-1} t = y,$$

welche vermöge der aus den beiden Gleichungen (159) und (160) entspringenden Relation

$$\int^v Y ds = \int t\, dx,$$

oder

$$(163) \cdots\cdot t = (Y)_v \frac{dv}{dx}$$

ein algebraisches particuläres Integral haben wird, und deren Coefficienten $Z_1, Z_2, \cdots Z_{m-1}$ rational aus $x, Y_1, Y_2 \cdots Y_m$ und der algebraischen Function u zusammengesetzt sind. Bemerkt man nun aber, dass dieselbe Substitution (160) auf die reducirte Differentialgleichung (161) angewendet, die Differentialgleichung

$$(164) \cdots\cdot \frac{d^{m-1}t}{dx^{m-1}} + Z_1 \frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} + \cdots + Z_{m-1} t = 0,$$

d. h. die aus (162) reducirte Differentialgleichung liefert, so gilt für die Gleichungen (162) und (164) der oben bewiesene Satz, dass jenes algebraische Integral der Gleichung (162) rational durch $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, u$ und y ausdrückbar ist, falls die reducirte Gleichung (164) entweder gar kein algebraisches Integral hat oder nur solche, welche rational durch $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, u$ und y ausdrückbar sind. Hat aber die Gleichung (164) gar kein algebraisches Integral, so hat nach (160) die Gleichung (161) kein Integral, welches aus dem Producte von u in ein Abel'sches Integral besteht, und hat die Gleichung (164) nur solche algebraische Integrale, welche rational in $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, u$ und y ausdrückbar sind, so hat (161) zwar solche Integrale, aber von der Beschaffenheit, dass der Differentialquotient t des aus jenem Integrale und der algebraischen Function u gebildeten Quotienten rational in $x, Y_1, \cdots Y_m, u$ und y ausdrückbar ist — in beiden Fällen folgt, dass

$$(165) \cdots\cdot \int t\,dx = \int^v Y\,ds$$

ist, worin t rational durch $x, Y_1, \cdots Y_m, u$ und y darstellbar ist. Findet aber eine Gleichung von der Form (165) statt, so war früher nachgewiesen worden, dass dann auch, wenn das Abel'sche Integral der rechten Seite zum Geschlechte p gehört,

$$(166) \cdots\cdot \int t\,dx = \frac{1}{\delta} \sum_1^p{}_\alpha \int^{v_\alpha} Y\,ds + w$$

ist, worin δ eine ganze positive Zahl, und $v_1, v_2, \cdots v_p$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational durch x und t, d. h. rational durch $x, Y_1, \cdots Y_m, u$ und y ausdrückbar sind, während die zugehörigen Werthe von Y aus eben diesen Grössen und den respectiven Werthen v_α rational zusammengesetzt sind, endlich w eine algebraisch-logarithmische Function von demselben Charakter bedeutet. Es folgt somit der nachstehende Satz:

Hat eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form

$$z = u \int^{v} Y ds$$

worin u und v algebraische Functionen der Variabeln x sind, und besitzt die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein Integral, welches durch u dividirt ein Abel'sches Integral wird, oder, wenn es ein solches wird, für die algebraische Function des Abel'schen Integrales eine rationale Function von u und den Coefficienten der Differentialgleichung liefert, so lässt sich jenes Integral auch stets in die Form setzen

$$z = \frac{u}{\delta} \sum_{1}^{p} {}_{\alpha} \int^{v_\alpha} Y ds + w,$$

worin δ eine ganze positive Zahl, $v_1, v_2, \cdots v_p$, wobei p das Geschlecht von Y bezeichnet, Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich rational durch $x, Y_1, \cdots Y_m, y$ und u ausdrücken lassen, während die zugehörigen Werthe von Y aus eben diesen Grössen und den respectiven Werthen v_α rational zusammengesetzt sind, endlich w eine algebraisch-logarithmische Function von demselben Charakter bedeutet.

Ist u selbst rational aus $x, Y_1, \cdots Y_m$ und y zusammengesetzt oder eine Constante — was z. B. der Fall wäre, wenn die reducirte Differentialgleichung (161) nur solche algebraische Integrale hätte, welche rational durch eben diese Grössen ausdrückbar sind — dann werden auch die Coefficienten der die Grössen $v_1, v_2, \cdots v_p$ definirenden Gleichung rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung selbst zusammengesetzt sein.

Nehmen wir allgemeiner das Integral in der Form an

$$(167) \cdots\cdot z = u_1 \int^{v_1} Y^{(1)} ds + u_2 \int^{v_2} Y^{(2)} ds + \cdots + u_\varrho \int^{v_\varrho} Y^{(\varrho)} ds + u,$$

in welchem $u_1, u_2, \cdots u_\varrho, v_1, v_2, \cdots v_\varrho, u$ algebraische Functionen von x, und $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \cdots Y^{(\varrho)}$ ebensolche Functionen von s seien, so werden offenbar wieder $u_1, u_2, \cdots u_\varrho$ unter der Voraussetzung der Irreductibilität der in (167) vorkommenden Abel'schen Integrale particuläre algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung sein müssen, und macht man somit die Substitution

$$(168) \cdots\cdot z = u_1 \int t dx,$$

so wird man wie oben auf eine lineare Differentialgleichung $m - 1^{ter}$ Ordnung geführt, deren rechte Seite wieder y ist, und welche ver-

möge (167), wie man leicht sieht, ein particuläres Integral von der Form hat

$$(169) \cdots\cdots t = U_2\int^{v_2} Y^{(2)}ds + U_3\int^{v_3} Y^{(3)}ds + \cdots + U_\varrho\int^{v_\varrho} Y^{(\varrho)}ds + U,$$

in welchem $U, U_2, \cdots U_\varrho$ wiederum algebraische Functionen von x sind, die zugleich algebraische particuläre Integrale der reducirten t-Differentialgleichung darstellen, und welches ein Abel'sches Integral weniger hat. So kann man durch successiv angewandte Substitutionen von der Form (168) die gegebene lineare Differentialgleichung auf eine andere nicht homogene reduciren, deren rechte Seite der der gegebenen Differentialgleichung gleich ist, und welche dann ein Integral von der Form

$$W_1\int^{v_\varrho} Y^{(\varrho)}ds + W$$

hat, in welcher W und W_1 algebraische Functionen von x bedeuten; auf diese können dann die oben gemachten Schlüsse angewandt werden, und hiervon ausgehend kann man dann in unmittelbar ersichtlicher Weise zurückschliessen.

Die Bedingung für die rationale Ausdrückbarkeit der Coefficienten der die Grenzen der Abel'schen Integrale bestimmenden Gleichung durch die Coefficienten der Differentialgleichung lässt sich aber noch bedeutend einschränken und ganz ebenso formuliren, wie es oben für logarithmische Integrale geschehen ist, indem dort die reducirte Differentialgleichung nicht nur im Allgemeinen, wie es hier jetzt geschehen ist, der engeren Bedingung unterworfen wurde, nicht durch Abel'sche Integrale befriedigt zu werden oder nur solche mit bestimmter Eigenschaft der Grenzen zu besitzen, sondern dass sie bloss nicht logarithmische Integrale oder nur logarithmische Integrale von bestimmter Beschaffenheit des Logarithmanden besitzen sollte. Ganz ähnlich lassen sich die Sätze auch hier gestalten, und die Art des Beweises führt zu interessanten Betrachtungen, welche der Transformationstheorie der Transcendenten angehören.

Habe also eine nicht homogene lineare Differentialgleichung (146) zum Integral ein elliptisches Integral, welches mit beliebigen algebraischen und logarithmischen Functionen additiv verbunden sein mag, also in der Form dargestellt werden kann

$$(170) \cdots\cdots z = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta(\xi)} + U,$$

worin

$$(171) \cdots\cdots \Delta(\xi) = \sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)},$$

$f(\xi)$ eine rationale Function von ξ, u_1 die Lösung einer irreductibeln

algebraischen Gleichung λ^{ten} Grades

$$(172) \cdots\cdot \varphi(u) = 0$$

bedeutet, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung sind, und endlich U eine algebraisch-logarithmische Function vorstellt, so bilde man in wiederholt angegebener Weise eine Grösse t, durch welche sich mit Hülfe der Coefficienten der Differentialgleichung die Grössen u_1, $\varDelta(u_1)$, der in U enthaltene algebraische Theil w und die einzelnen Logarithmanden $w_1, w_2, \cdots w_\sigma$ rational ausdrücken lassen. Sei die irreductible algebraische Gleichung, welcher die Grösse t genügt

$$(173) \cdots\cdot T = 0,$$

so wird, wenn man aus (170) die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots$ berechnet und in die Differentialgleichung einsetzt, dieselbe, wenn für die Grössen u_1, $\varDelta(u_1)$, $w, w_1, w_2, \cdots w_\sigma$ ihre rationalen Ausdrücke in t gesetzt werden, in eine rationale Function von t übergehen, welche bekanntlich dann durch alle Lösungen von $T = 0$ zu Null gemacht werden muss, woraus folgt, dass die diesen t-Grössen entsprechenden Werthe von u, $\varDelta(u)$, $w, w_1, \cdots w_\sigma$ in (170) eingesetzt, Integrale der gegebenen Differentialgleichung liefern. Wählen wir nun alle diejenigen t-Werthe aus, welche u_1 und $\varDelta(u_1)$ unverändert lassen — denn es ist nicht etwa auch t eine rationale Function der Grössen u_1 etc. — so werden wir eine Reihe von Integralen der Differentialgleichung von der Form erhalten

$$z_1 = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\varDelta(\xi)} + w^{(1)} + A_1 \log w_1^{(1)} + A_2 \log w_2^{(1)} + \cdots + A_\sigma \log w_\sigma^{(1)}$$

$$z_2 = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\varDelta(\xi)} + w^{(2)} + A_1 \log w_1^{(2)} + A_2 \log w_2^{(2)} + \cdots + A_\sigma \log w_\sigma^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und es wird somit auch der Ausdruck

$$(174) \quad Z_1 = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\varDelta(\xi)} + W + B_1 \log W_1 + B_2 \log W_2 + \cdots + B_\sigma \log W_\sigma$$

ein Integral der Differentialgleichung sein, worin die $W, W_1, \cdots W_\sigma$ als symmetrische Functionen der w-Werthe rational in den Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind. Setzt man den Werth von Z in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich einerseits aus derselben, dass $\varDelta(u_1)$ sich mit Hülfe der Coefficienten der Differentialgleichung als rationale Function von u_1 darstellen lässt, andererseits folgt aber auch aus dem Früheren, dass, wenn man statt u_1

irgend eine andere Lösung u_2 der Gleichung (172) und für $\Delta(u_2)$ dieselbe rationale Function von u_2 setzt, auch der Ausdruck

$$(175)\quad Z_2 = \int^{u_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta(\xi)} + W^{(1)} + B_1 \log W_1^{(1)} + B_2 \log W_2^{(1)} + \cdots + B_\sigma \log W_\sigma^{(1)}$$

der Differentialgleichung genügt. Es wird daher

$$(176)\cdots\cdot z = Z_1 - Z_2 = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{u_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta(\xi)} + W - W^{(1)}$$

$$+ B_1 \log \frac{W_1}{W_1^{(1)}} + \cdots + B_\sigma \log \frac{W_\sigma}{W_\sigma^{(1)}}$$

der reducirten Differentialgleichung

$$(177)\cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

genügen, oder auch der Ausdruck

$$(178)\cdots z = \int^{v} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\Delta(\xi)} + X + C_1 \log X_1 + C_2 \log X_2 + \cdots + C_\tau \log X_\tau,$$

wenn $X, X_1, \cdots X_\tau$ wieder algebraische Functionen bedeuten, und

$$(179)\cdots\cdot \frac{du_1}{\Delta(u_1)} - \frac{du_2}{\Delta(u_2)} = \frac{dv}{\Delta(v)}$$

gesetzt ist, also die Relationen bestehen

$$(180)\cdots\cdot u_2 = \frac{u_1 \Delta(v) - v \Delta(u_1)}{1 - \varkappa^2 u_1^2 v^2}$$

und

$$\cdots\cdot \Delta(u_2) = \frac{\Delta(u_1)\Delta(v)(1 + \varkappa^2 u_1^2 v^2) + u_1 v(\varkappa^2 + 1 + 2\varkappa^2(u_1^2 + v^2) + 2\varkappa^2 u_1^2 v^2)}{1 - \varkappa^2 u_1^2 v^2}.$$

Nehmen wir nun an, dass die reducirte Differentialgleichung (177) gar kein Integral besitzt, welches aus algebraisch-logarithmischen Functionen und einem zur Irrationalität $\Delta(\xi)$ gehörigen elliptischen Integrale additiv zusammengesetzt ist, oder, wenn es ebensolche Integrale hat, dass die obere Grenze des resp. elliptischen Integrales und die dazugehörige Irrationalität rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ und y zusammengesetzt ist, so würde, da in der Gleichung (180) einerseits $\Delta(u_1)$ eine rationale Function von u_1 war, andererseits nach der eben gemachten Annahme v und $\Delta(v)$ rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung sein müssten,

$$u_2 = f(u_1, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y)$$

sein, worin f eine rationale Function der in der Klammer enthaltenen

Grössen bedeutet; da nun u_1 und u_2 Lösungen der mit Adjungirung der Grössen $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ irreductibeln algebraischen Gleichung (172) sind, so werden sich sämmtliche Lösungen derselben bekanntlich in die folgende Gruppenform bringen lassen

$$(0) \cdots \cdot \begin{cases} u_1 & u_2 & u_3 \cdots\cdots u_\varrho \\ u_1^{(1)} & u^{(1)} & u_3^{(1)} \cdots\cdots u_\varrho^{(1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_1^{(\sigma-1)} & u_2^{(\sigma-1)} & u_3^{(\sigma-1)} \cdot\cdot\, u_\varrho^{(\sigma-1)}, \end{cases}$$

in welcher die Lösungen je einer Horizontalreihe die iterirten rationalen Functionen f des Anfangsgliedes einer jeden derselben sind, und somit z. B. der ersten Horizontalreihe von (0) das transcendente Gleichungssystem entspricht

$$(182) \cdots \cdot \begin{cases} \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{u_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \int^{u_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{u_3} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \int^{u_{\varrho-1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{u_\varrho} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \int^{u_\varrho} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}, \end{cases}$$

in welchem sich die Integrale vermöge der verschiedenen Wege noch um Vielfache der Periodicitätsmoduln unterscheiden können, woraus durch Addition

$$(183) \cdots \cdot \varrho \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = m\omega + m'\omega'$$

folgt, wenn m und m' ganze Zahlen, ω und ω' zwei Elementarperioden des elliptischen Integrales bedeuten. Setzt man also

$$\int_0^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = w_1,$$

so folgt

$$(184) \cdots \cdot u_1 = \sin\mathrm{am}(w_1, \varkappa), \quad u_2 = \sin\mathrm{am}\left(w_1 + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right),$$

$$u_3 = \sin\mathrm{am}\left(w_1 + 2 \cdot \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right), \cdots$$

$$u_\varrho = \sin\mathrm{am}\left(w_1 + (\varrho - 1)\frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right).$$

Wegen der ähnlichen für die Glieder der Gruppe je einer Verticalreihe bestehenden Beziehung erhält man z. B. für die Glieder der ersten Verticalreihe die Ausdrücke

$$(185) \cdots\cdot u_1 = \operatorname{sinam}(w_1, \varkappa),\ u_1^{(1)} = \operatorname{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \varkappa\right),$$
$$u_1^{(2)} = \operatorname{sinam}\left(w_1 + 2\cdot\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \varkappa\right), \cdots$$
$$u_1^{(\sigma-1)} = \operatorname{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1)\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \varkappa\right),$$

und ähnlich für die anderen Horizontal- und Verticalgruppen, so dass, wenn

$$\int_0^u \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = w$$

gesetzt wird, die die Grössen u definirende Gleichung lautet:

$$(186)\ \Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}(w_1, \varkappa)\Big]$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big]$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + 2\frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big]\cdots$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + (\varrho-1)\frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big] \times$$
$$\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \varkappa\right)\Big]$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big]\cdots$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + (\varrho-1)\frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big]$$

. . . .

$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1)\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \varkappa\right)\Big]$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1)\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big]\cdots$$
$$\cdot\Big[\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1)\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + (\varrho-1)\frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\Big].$$

Bekanntlich ist aber für eine Transformation ϱ^{ten} Grades, wenn

$$(187) \cdots\cdot \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho} = \Omega$$

gesetzt wird, $\varkappa$ den ursprünglichen, λ den transformirten Integralmodul, M den Multiplicator der Transformation bedeutet,

$$(188) \cdots\cdot \operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{\varkappa^\varrho}{\lambda}} \operatorname{sinam}(w, \varkappa) \times \frac{\prod_{\alpha=1}^{\varrho-1} \left(\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}(\alpha\Omega, \varkappa)\right)}{\prod_{\alpha=1}^{\frac{\varrho-1}{2}} \left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(w, \varkappa) \sin^2 \operatorname{am}(\alpha\Omega, \varkappa)\right)}.$$

Bildet man den Ausdruck

$$(\mathrm{L}) \cdots\cdot \operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \operatorname{sinam}\left(\frac{w_1}{M}, \lambda\right),$$

so wird dieser Ausdruck verschwinden, wenn $w = w_1$ ist, andererseits sieht man aber aus dem bekannten Ausdrucke

$$(189) \cdots\cdot \operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{\varkappa^\varrho}{\lambda}} \operatorname{sinam}(w, \varkappa) \operatorname{sinam}(w + \Omega, \varkappa) \cdot \operatorname{sinam}(w + 2\Omega, \varkappa) \cdots \operatorname{sinam}\left(w + (\varrho - 1)\Omega, \varkappa\right),$$

dass der Ausdruck $\operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right)$ unverändert bleibt, wenn statt w die Grösse $w + \nu\Omega$ gesetzt wird, worin ν irgend eine ganze Zahl bedeutet, so dass der Ausdruck (L) auch verschwindet, wenn $w = w_1 + \Omega, w_1 + 2\Omega, \cdots w_1 + (\varrho - 1)\Omega$ gesetzt wird, und da nun aus (188) folgt, dass der Zähler des Ausdruckes (L) eine ganze Function ϱ^{ten} Grades von $\operatorname{sinam}(w, \varkappa)$ ist, so wird sich dieser in die Form setzen lassen

$$C\left(\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}(w_1, \varkappa)\right) \cdot \left(\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\right) \cdots\cdot \left(\operatorname{sinam}(w, \varkappa) - \operatorname{sinam}\left(w_1 + (\varrho - 1)\frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \varkappa\right)\right),$$

worin C eine Constante bedeutet, also in den ersten Theil der Gleichung (186) übergehen, und man sieht sofort, dass, weil die anderen Theile dieser Gleichung sich ebenfalls als die Zähler von Ausdrücken der Form

$$\operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \operatorname{sinam}\left(\frac{w_1 + \nu \cdot \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}}{M}, \lambda\right)$$

darstellen lassen, während die Nenner dieser Ausdrücke nur für constante, nicht von w_1 abhängige Werthe von w verschwinden können,

die Gleichung (186), welche in sinam $(w, \varkappa)$ vom $\varrho\sigma^{\text{ten}}$ Grade ist, sich ersetzen lässt durch die folgende

$$(190) \cdots \left[\operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \operatorname{sinam}\left(\frac{w_1}{M}, \lambda\right)\right]$$

$$\cdot\left[\operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \operatorname{sinam}\left(\frac{w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}}{M}, \lambda\right)\right]\cdots$$

$$\cdots\left[\operatorname{sinam}\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \operatorname{sinam}\left(\frac{w_1 + (\sigma - 1)\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}}{M}, \lambda\right)\right] = 0,$$

welche in sinam $\left(\frac{w}{M}, \lambda\right)$ nur vom σ^{ten} Grade ist. Nun war aber oben als Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung das elliptische Integral

$$(191) \cdots z_1 = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\Delta(\xi, \varkappa)} + U$$

vorausgesetzt, worin

$$\Delta(\xi, \varkappa) = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \varkappa^2 \xi^2)},$$

und u_1 eine Lösung jener Gleichung $\varrho\sigma^{\text{ten}}$ Grades ist, welche auch in die Form gesetzt wurde

$$(192) \cdots u_1 = \operatorname{sinam}(w_1, \varkappa);$$

setzt man nun

$$(193) \cdots \int_0^{\mathfrak{u}_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi, \lambda)} = \frac{1}{M} \int_0^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi, \varkappa)},$$

so wird z_1 vermöge der durch diese Gleichung ausgedrückten Transformation ϱ^{ten} Grades übergehen in

$$(194) \cdots z_1 = \int^{\mathfrak{u}_1} \frac{F(\xi)\, d\xi}{\Delta(\xi, \lambda)} + \mathfrak{U},$$

worin vermöge (192) und (193)

$$(195) \cdots \mathfrak{u}_1 = \operatorname{sinam}\left(\frac{w_1}{M}, \lambda\right),$$

und somit $\mathfrak{u}_1$ eine Lösung der Gleichung σ^{ten} Grades (190) ist. Wir finden also, dass, wenn jener linearen Differentialgleichung ein elliptisches Integral genügt, dessen obere Grenze eine algebraische Function der Variabeln ist, der Grad der diese Function definirenden Gleichung vermöge einer Zerlegung in Gruppen erniedrigt werden kann, und fährt man in dieser Schlussweise fort, bis man zu einer Gleichung ersten Grades gelangt, so erhält man den folgenden Satz:

Genügt einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung ein

elliptisches Integral, dessen obere Grenze eine algebraische Function der Variabeln ist, so lässt sich dieses, wenn die reducirte Differentialgleichung als Lösung entweder gar kein elliptisches Integral besitzt, welches zu demselben Integralmodul gehört, oder, falls derartige Integrale vorhanden sind, die obere Grenze des elliptischen Integrales, sowie die dazugehörige Irrationalität rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt ist, in ein elliptisches Integral mit anderem, durch algebraische Transformation erhaltenen Integralmodul verwandeln, dessen obere Grenze eine rationale Function der Coefficienten der Differentialgleichung ist.

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, wie diese Sätze auf hyperelliptische und Abel'sche Integrale auszudehnen sind, nachdem oben die Verwendung des Abel'schen Theorems für diese Fragen besprochen worden.

§ 15.

Eigenschaften der Irrationalitäten solcher Abel'scher Integrale, aus denen Integrale linearer Differentialgleichungen zusammengesetzt sind.

Nachdem wir eine Reihe von Sätzen über die rationale Ausdrückbarkeit der Grenzen von Abel'schen Integralen aufgestellt haben, welche linearen nicht homogenen Differentialgleichungen genügen, wollen wir die Beschaffenheit der algebraischen Irrationalität solcher Abel'scher Integrale näher untersuchen.

Habe also die Differentialgleichung

$$(196) \cdots \quad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

ein Integral der Form

$$(197) \cdots \quad z_1 = \int^{u_1} f\big(\xi, \varDelta(\xi)\big)\, d\xi + U,$$

worin

$$\varDelta(\xi) = \sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)},$$

u_1 eine algebraische Function von x ist, und U_1 eine algebraisch-logarithmische Function bedeutet, so war oben gezeigt worden, dass jener Differentialgleichung auch stets ein Integral von der Form

$$(198) \cdots \quad z_2 = \frac{1}{\delta} \int^{v} f\big(\xi, \varDelta(\xi)\big)\, d\xi + V$$

genügt, worin δ eine positive ganze Zahl, v und $\varDelta(v)$ rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ zusammengesetzt sind, und V eine algebraische Function desselben Charakters ist.

Bildet man den Ausdruck

$$(199) \cdots\cdot z = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

woraus

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{1}{\Delta(v)}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{1}{\Delta(v)} - \frac{\Delta'(v)}{\Delta(v)^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2, \cdots$$

folgt, und setzt hieraus die Grösse

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx}$$

zusammen, so wird dieselbe eine rationale Function von $x, Y_1, \cdot\cdot Y_{m-1}, y$, welche wir durch $F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)$ bezeichnen wollen; wir finden somit, *dass, wenn der Differentialgleichung*

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y$$

durch ein elliptisches Integral genügt wird, eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = F(x, Y_1, \cdots Y_m, y)$$

existirt, worin F eine rationale Function bedeutet, und welche als Integral das zugehörige elliptisches Integral erster Gattung von der Form

$$z = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

besitzt, für welches v und $\Delta(v)$ rational durch $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ ausdrückbar sind.

Wir werden somit zur Feststellung der Eigenschaft der Irrationalität $\Delta(\xi)$ nur solche lineare, nicht homogene Differentialgleichungen zu betrachten haben, welche ein elliptisches Integral erster Gattung zum Integral haben, dessen obere Grenze sammt der zu dieser Grenze gehörigen Irrationalität rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar ist.

Habe also die Differentialgleichung (196) das Integral (199), und denke man sich für die Ableitungen von z die schon oben entwickelten Werthe eingesetzt, so kann man in der für alle x nunmehr identischen Gleichung die Variable x willkürliche Wege beschreiben lassen, immer wird die Gleichung identisch befriedigt werden, und aus früher angestellten Betrachtungen ist klar, dass, wenn man y als Lösung einer mit Adjunction der Grössen $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ irreductibeln Gleichung

$$(200) \cdots\cdot y^n + \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})\, y^{n-1} + \cdots \\ \cdots + \varphi_n(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0$$

auffasst, man x solche Umläufe machen lassen kann, dass man ohne Aenderung der Werthe $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ successive zu allen n Wurzelwerthen dieser Gleichung gelangt, wie dies für irreductible Gleichungen bekanntlich allgemein möglich ist. Nehmen wir nun an, dass zwei Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung (200) in der Beziehung zu einander stehen, dass

$$(201) \cdots\cdot y_2 = \varepsilon y_1$$

ist, so wissen wir aus der im vorigen § angestellten Untersuchung, dass ε eine Constante, und zwar eine μ^{te} Einheitswurzel sein muss, und die Gleichung (200) dann die Form annimmt:

$$(202) \cdots\cdot y^{\varkappa\mu} + \varphi_\mu(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})\, y^{(\varkappa-1)\mu} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{\varkappa\mu}(x; Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0.$$

Nehme nun v_1, während y_1 in $y_2 = \varepsilon y_1$ übergeht, worin ε die primitive μ^{te} Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ bedeutet, mit Beibehaltung der Werthe $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ den Werth v_2 an, so wird, wenn y_1, z_1, v_1 und y_2, z_2, v_2 entsprechende Werthe bedeuten,

$$z_2 = \int^{v_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = \varepsilon y_1$$

genügen, so dass

$$(203) \cdots\cdot \frac{d^m(\varepsilon z_1 - z_2)}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1}(\varepsilon z_1 - z_2)}{dx^{m-1}} + \cdots$$
$$\cdots + Y_{m-1} \frac{d(\varepsilon z_1 - z_2)}{dx} = 0$$

wird, und daher die homogene lineare Differentialgleichung

$$(204) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

das Integral

$$(205) \cdots\cdot z = \int^{v_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \varepsilon \int^{v_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

besitzt.

Nehmen wir nun an, dass die reducirte Differentialgleichung (204) gar kein Integral einer algebraischen Function zu ihrem Integrale hat, d. h. dass die durch Substitution von $\frac{dz}{dx} = \zeta$ aus (204) hervorgehende Gleichung

$$(206) \cdots\cdot \frac{d^{m-1}\zeta}{dx^{m-1}} + Y_1 \frac{d^{m-2}\zeta}{dx^{m-2}} + \cdots + Y_{m-1}\zeta = 0$$

kein algebraisches Integral besitzt, oder auch, dass, falls die Gleichung (204) Abel'sche Integrale zu Lösungen hat, diese sich stets durch ein elliptisches Integral erster Gattung mit derselben Irrationalität $\Delta(\xi)$ darstellen lassen*), so würde jedenfalls

$$(207) \cdots \cdot \frac{dv_2}{\Delta(v_2)} - \varepsilon \frac{dv_1}{\Delta(v_1)} = \frac{dv_3}{\Delta(v_3)}$$

sein, worin v_3 auch eine Constante sein kann. Setzt man nun

$$\frac{dv_2}{\Delta(v_2)} - \frac{dv_3}{\Delta(v_3)} = \frac{dv'}{\Delta(v')},$$

so geht die Gleichung (207) in

$$(208) \cdots \cdot \frac{dv'}{\Delta(v')} = \varepsilon \frac{dv_1}{\Delta(v_1)}$$

über, worin offenbar v' und v_1 algebraisch mit einander zusammenhängen. Da aber der Modul der beiden elliptischen Differentialien der Gleichung (208) derselbe ist, und

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{\mu} + i\sin\frac{2\pi}{\mu}$$

reell nur dann ist, wenn $\frac{2\pi}{\mu} = \varkappa\pi$, worin $\varkappa$ eine ganze Zahl, d. h., wenn $\mu = 2$, also $\varepsilon = -1$ ist, so folgt aus der bekannten Definition der complexen Multiplication elliptischer Integrale der Satz,

dass, wenn einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung, deren rechte Seite y bei einem geschlossenen Umlaufe der Variabeln, für welchen die Coefficienten der Differentialgleichung unverändert bleiben, in ein Multiplum dieses Werthes übergeht, ein elliptisches Integral genügt, unter der Voraussetzung, dass die reducirte Gleichung, wenn sie überhaupt durch ein Abel'sches Integral befriedigt wird, als solches nur ein elliptisches Integral mit demselben Modul besitzt, der Integralmodul des elliptischen Integrales ein Modul der complexen Multiplication sein muss, wenn nicht jenes Multiplum $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ reell, d. h. $\mu = 2$ ist.

Setzen wir mit der bekannten Bezeichnung gradliniger Integrale

$$\omega = 4\int_0^1 \left|\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right., \quad \omega' = 2\int_0^{\frac{1}{\varkappa}} \left|\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right. - 2\int_0^1 \left|\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right.,$$

so gelten vermöge des algebraischen Zusammenhanges der Grössen v_1 und v' für die Gleichung (208) nach bekannten, der Transformations-

*) Für den Fall der einfachsten Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ würde das Integral der reducirten Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ eine Constante sein, die sich stets als ein solches elliptisches Integral auffassen lässt, somit der obigen Bedingung für die reducirte Gleichung stets genügt werden.

theorie der elliptischen Integrale geläufigen Schlüssen die Beziehungen

$$(209) \cdots\cdot \begin{cases} \delta\omega = \varepsilon a_0 \omega + \varepsilon a_1 \omega' \\ \delta\omega' = \varepsilon b_0 \omega + \varepsilon b_1 \omega', \end{cases}$$

worin δ, a_0, a_1, b_0, b_1 ganze Zahlen bedeuten, und man erhält somit zwischen diesen Zahlen und ε die nothwendig zu erfüllende Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 \varepsilon - \delta & a_1 \varepsilon \\ b_0 \varepsilon & b_1 \varepsilon - \delta \end{vmatrix} = 0;$$

daraus folgt, dass $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein muss, woraus wieder unmittelbar die einzig möglichen Werthe von μ bestimmt werden können. Denn wenn

$$\cos\frac{2\pi}{\mu} + i\sin\frac{2\pi}{\mu}$$

die Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist, so muss $\cos\frac{2\pi}{\mu}$ selbst rational sein, und aus dem Ausdrucke

$$\cos k\cdot\frac{2\pi}{\mu} = \cos^k\frac{2\pi}{\mu} - \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cos^{k-2}\frac{2\pi}{\mu}\sin^2\frac{2\pi}{\mu} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{k-4}\frac{2\pi}{\mu}\sin^4\frac{2\pi}{\mu} + \cdots,$$

worin k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, folgt dann auch, dass $\cos k\cdot\frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl sein muss. Sei nun

$$\mu = 2^\alpha\, 3^\beta\, p_1^{\varrho_1}\, p_2^{\varrho_2} \cdots p_\lambda^{\varrho_\lambda},$$

worin $p_1, p_2, \cdots p_\lambda$ von 2 und 3 verschiedene Primzahlen, und $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_\lambda$ positive ganze Zahlen bedeuten, so würde, wenn $\cos\frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl wäre, auch

$$\cos 2^\alpha\, 3^\beta\, p_1^{\varrho_1 - 1}\, p_2^{\varrho_2} \cdots p_\lambda^{\varrho_\lambda}\cdot\frac{2\pi}{\mu}, \quad \text{d. h.} \quad \cos\frac{2\pi}{p_1}$$

rational sein müssen; nun ist aber $\cos\frac{2\pi}{p_1} + i\sin\frac{2\pi}{p_1}$ ein Lösung der Gleichung

$$\text{(a)} \cdots\cdot x^{p_1-1} + x^{p_1-2} + \cdots + x + 1 = 0,$$

welche, wie wir wissen, irreductibel ist in Bezug auf die Rationalität der Coefficienten, und setzt man

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

so hat die sich ergebende Gleichung

$$(b) \cdots y^{\frac{p_1-1}{2}} + y^{\frac{p_1-3}{2}} - \frac{p_1-3}{2} y^{\frac{p_1-5}{2}} + \cdots = 0$$

die Lösung

$$\left(\cos\frac{2\pi}{p_1} + i\sin\frac{2\pi}{p_1}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{p_1} - i\sin\frac{2\pi}{p_1}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{p_1},$$

und auch die Gleichung (b) wird irreductibel sein, da, wenn sie es nicht wäre, die Substitution von $y = x + \frac{1}{x}$ in einen der Zerlegungsfactoren auch eine Zerlegung der Gleichung (a) liefern würde; es kann somit $\cos\frac{2\pi}{p_1}$ nur dann rational sein, wenn $\frac{p_1-1}{2} = 1$, also $p_1 = 3$ ist, dasselbe gilt für $p_2, \cdots p_\lambda$, somit sind die einzig möglichen Fälle von μ, für welche $\cos\frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl sein soll, in der Form enthalten

$$\mu = 2^\alpha\, 3^\beta;$$

ist nun $\beta = 2$ oder > 2, so folgt ebenso, dass dann auch $\cos\frac{2\pi}{9}$ rational sein müsste, was, wie man leicht einsieht, nicht der Fall ist, ebenso würde, wenn $\alpha = 3$ oder > 3 sein würde, auch $\cos\frac{2\pi}{8}$ rational sein müssen, was wiederum nicht der Fall ist, also sind die möglichen Fälle zunächst auf die Form

$$\mu = 2^\alpha \cdot 3^\beta$$

beschränkt, worin $\alpha = 0, 1, 2$, $\beta = 0, 1$ sein kann; in der That ist für $\mu = 2, 3, 4, 6$

$$\cos\frac{2\pi}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{4}, \quad \cos\frac{2\pi}{3}, \quad \cos\frac{2\pi}{6}$$

eine rationale Zahl, und wir finden, dass ε nur die 4 Formen haben kann

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2}}, \; e^{\frac{2\pi i}{4}}, \; e^{\frac{2\pi i}{3}}, \; e^{\frac{2\pi i}{6}}.$$

Andererseits ist aber leicht einzusehen*), dass nur zwei in einander transformirbare elliptische Integrale dieselben Multiplica-

*) Man kann dies leicht mit Hülfe der aus der Transformationstheorie der elliptischen Functionen bekannten Formeln beweisen; stehen nämlich zwei elliptische Differentiale in der Beziehung

$$\frac{dy}{\Delta(y)} = a\frac{d\eta}{\Delta(\eta)},$$

worin y und η algebraisch zusammenhängen, so ist

$$\delta\omega = ar\omega + as\omega'$$
$$\delta\omega' = ar'\omega + as'\omega',$$

toren der complexen Multiplication haben können; da nun die Multiplicatoren mit Ausnahme von $e^{\frac{2\pi i}{2}} = -1$, in welchem Falle derselbe reell wird, sich also für den Modul des Integrales gar keine Be-

---

woraus unmittelbar

$$(A) \dots \tau = \frac{-(r-s') + \sqrt{(r-s')^2 + 4r's}}{s}, \quad a = \frac{2\delta}{2r + s\tau}$$

folgt. Hieraus ist nun leicht einzusehen, in welcher Beziehung zu einander verschiedene complexe Multiplicationsmoduln stehen müssen, wenn der Multiplicator a für diese Moduln derselbe sein soll, oder wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda_1^2 t^2)}} = \frac{a\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda_1^2 u^2)}}$$
$$\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda_2^2 v^2)}} = \frac{a\,dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-\lambda_2^2 w^2)}},$$

in welchen u mit t, ebenso wie w mit v algebraisch verbunden sind, zu gleicher Zeit bestehen sollen; denn da sich dann, wenn der zum Modul λ_1 gehörige ϑ-Modul mit τ_1, der zu λ_2 gehörige mit τ_2 bezeichnet wird, aus (A) vermöge der Gleichheit der Multiplicatoren die Beziehung ergiebt

$$\frac{2\delta_1}{2r_1 + s_1\tau_1} = \frac{2\delta_2}{2r_2 + s_2\tau_2},$$

in welcher die der Transformation zugehörigen ganzen Zahlen mit entsprechenden Indices versehen sind, so folgt

$$(B) \dots \tau_2 = \frac{2(r_1\delta_2 - r_2\delta_1) + \delta_2 s_1 \tau_1}{\delta_1 s_2},$$

und somit τ_2 als lineare Function von τ_1. Da nun, wie wir wissen, der reelle Theil von $\frac{\tau_1}{i}$ und $\frac{\tau_2}{i}$ wesentlich positiv ist, und diese beiden reellen Theile sich nach (B) um den Factor $\frac{\delta_2 s_1}{\delta_1 s_2}$ unterscheiden, so wird dieser Factor ebenfalls positiv sein, und somit, wenn in bekannter Bezeichnungsweise

$$\tau_2 = \frac{b_0 - a_0\tau_1}{a_1\tau_1 - b_1}$$

gesetzt wird, in unserem Falle

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = \delta_1 \delta_2 s_1 s_2 = N$$

eine positive ganze Zahl sein; nach einem bekannten Satze der Transformationstheorie ist dann aber τ_2 ein durch eine Transformation N^{ten} Grades aus τ_1 transformirter ϑ-Modul, und es folgt somit, dass die beiden Moduln λ_1 und λ_2 der complexen Multiplication aus einander transformirte Integralmoduln sein müssen, dass also *gleiche Multiplicatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln in einander transformirbar sind,* oder endlich, dass, wenn wir transformirte Integralmoduln als gleich betrachten, *jedem Multiplicatorwerth einer complexen Multiplication nur ein Modul entsprechen wird.*

dingung ergiebt, sämmtlich complex sind, und die elliptischen Integrale

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}, \quad \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}, \quad \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6 - 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta^3 - 1)}} \quad (\text{für } \xi^2 = \eta)$$

eben diese Multiplicatoren besitzen, wie aus den Substitutionen

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}} \xi_1, \quad \xi = e^{\frac{2\pi i}{4}} \xi_1, \quad \xi = e^{\frac{2\pi i}{6}} \xi_1 \quad \text{oder} \quad \eta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \eta_1$$

hervorgeht, so werden diese drei elliptischen Integrale, wenn wir den Fall $\mu = 2$ ausschliessen, diejenigen sein, die allein Integrale jener linearen, nicht homogenen Differentialgleichung sein können.

Wir können somit das folgende Theorem aussprechen:

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

in welcher y durch die Gleichung definirt ist

$$(210) \quad y^{\varkappa\mu} + \varphi_\mu(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) y^{(\varkappa-1)\mu} + \cdots + \varphi_{\varkappa\mu}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

kann nur dann durch ein elliptisches Integral erster Gattung — und zwar unter der Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein durch ein Abel'sches Integral darstellbares Integral besitzt (von dem constanten Integrale abgesehen), oder nur elliptische Integrale mit demselben Modul — befriedigt werden, wenn $\mu = 2, 3, 4, 6$ ist, und dann sind in den drei letzten Fällen die Integrale der Differentialgleichung von einer der Formen

$$\int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}, \quad \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}, \quad \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6 - 1}} = \frac{1}{2}\int^v \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta^3 - 1)}},$$

worin u respective v, sowie die dazugehörigen Irrationalitäten rationale Functionen von x, Y_1, Y_2, $\cdots Y_{m-1}$ und y sind.

Fassen wir den Fall $\mu = 2$ ins Auge, für welchen y der Gleichung genügen wird

$$(211) \quad \cdots \quad y^{2\varkappa} + \varphi_2(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) y^{2\varkappa-2}$$
$$+ \varphi_4(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) y^{2\varkappa-4} + \cdots + \varphi_{2\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

so wird man, wenn der Differentialgleichung das Integral genügt

$$(212) \quad \cdots \quad z_1 = \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

worin

$$\Delta(\xi) = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - c^2\xi^2)},$$

und u_1 sowie $\Delta(u_1)$ rationale Functionen von x, Y_1, $\cdots Y_{m-1}$ und y bedeuten, nach der Gleichung (211) die Variable x einen solchen Umlauf machen lassen können, dass ohne Werthveränderung von

$Y_1 \cdots Y_{m-1}$ die Wurzel y in $-y$ übergeführt wird, wofür die aus diesen Grössen rational zusammengesetzten Werthe von u_1 und $\Delta(u_1)$ in u_2 und $\Delta(u_2)$ übergehen mögen, und es wird daher

$$z_2 = \int^{u_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = -y$$

sein, und somit, wie unmittelbar zu sehen,

$$z_3 = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

der ursprünglichen Differentialgleichung genügen; setzt man aber

$$u_1 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) \qquad \Delta(u_1) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)$$
$$u_2 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -y) \quad \Delta(u_2) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -y),$$

so ist, wenn man

$$\int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{u_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{u_3} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

setzt, vermöge der bekannten Ausdrücke für u_3 und $\Delta(u_3)$ sofort einzusehen, dass

$$u_3 = f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y^2) \cdot y, \qquad \Delta(u_3) = F_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y^2)$$

ist, und, dass, wenn wir zu z_3, was erlaubt ist, da $Y_m = 0$, noch eine Constante von der Form

$$\frac{1}{2} \int^1 \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

hinzufügen, das neue Integral

$$z = \frac{1}{2} \int^v \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

so beschaffen ist, dass v eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^2 wird, während $\Delta(v)$ das Product einer eben solchen Function in y selbst ist.

Nun können aber auch alle linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

bestimmt werden, in denen y die Lösung einer Gleichung von der Form (211) ist, und welchen ein elliptisches Integral

$$\frac{1}{2} \int^v \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

genügt; denn setzt man $y^2 = t$, so ist t nach (211) durch die Gleichung bestimmt

$$(213) \cdots\cdot t^{\varkappa} + \varphi_2(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}$$
$$+ \varphi_4(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-2} + \cdots + \varphi_{2\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

worin die Functionen $\varphi_2, \varphi_4, \cdots \varphi_{2\varkappa}$ passend zu wählen sein werden, und v wird nach dem oben bewiesenen als eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und t, also von der Form

$$(214) \quad v = \frac{\omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t + \cdots + \omega_{\varkappa-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}}{\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})}$$

worin die ω ganze Functionen der Grössen $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ sind, so zu bestimmen sein, dass $\Delta(v)$ durch $y = \sqrt{t}$ dividirt, oder dass

$$(215) \cdots\cdot \frac{\Delta(v)}{y} =$$

$$\sqrt{\frac{\begin{array}{l}[\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) - \omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) - \omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t - \cdots - \omega_{\varkappa-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}] \\ [\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + \omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t + \cdots + \omega_{\varkappa-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}] \\ [\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) - c\,\omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) - c\,\omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t - \cdots - c\,\omega_{\varkappa-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}] \\ [\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + c\,\omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + c\,\omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t + \cdots + c\,\omega_{\varkappa-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}]\end{array}}{t}}$$

eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und t ist. Sind z. B. die Functionen $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ rationale Functionen von x, so würde die Forderung die sein, die ganzen Functionen von $x: \omega, \omega_0, \omega_1, \cdots \omega_{\varkappa-1}$ so zu bestimmen, dass die eben angegebene Irrationalität mit t selbst gleich verzweigt ist, und wie man eine derartige Aufgabe behandelt, ist im § 12 bei der Frage der Reduction hyperelliptischer und Abel'scher Integrale auf solche niederer Gattung besprochen und an Beispielen erläutert worden. Sind nun die Coefficienten ω und der Integralmodul c diesen Bedingungen gemäss bestimmt, so setze man

$$z = \frac{1}{2} \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{dv}{dx}}{\Delta(v)}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\Delta(v)} - \frac{1}{2} \frac{\Delta'(v)}{\Delta(v)^2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2, \cdots$$

und bilde den Ausdruck

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx},$$

so ist vermöge der oben für v und $\Delta(v)$ angegebenen Formen unmittelbar zu sehen, dass dieser Ausdruck die Gestalt haben wird

$$F(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y^2) \cdot y,$$

worin F eine rationale Function bedeutet, und setzt man

$$F(x,\ Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_{m-1},\ y^2)\cdot y = \eta,$$

so sieht man aus der für y gegebenen Gleichung (211) unmittelbar, dass η ebenfalls durch eine Gleichung der Form definirt ist

$$\eta^{2\varkappa} + \psi_2(x,\ Y_1, \cdots\ Y_{m-1})\,\eta^{2\varkappa-1} + \cdots + \psi_{2\varkappa}(x,\ Y_1, \cdots\ Y_{m-1}) = 0,$$

und dass das elliptische Integral

$$z = \frac{1}{2}\int^{v}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

der Differentialgleichung genügt

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = \eta;$$

auf diese Weise kann man alle Differentialgleichungen dieser Form bestimmen, deren rechte Seite einer Gleichung von der Form (211) genügt, und die durch ein elliptisches Integral befriedigt werden.

Gehen wir nunmehr zu dem Falle $\mu = 3$ über, in welchem also y durch die Gleichung definirt war

$$(216)\quad y^{3\varkappa} + \varphi_3(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1})\,y^{3\varkappa-3} + \cdot\cdot + \varphi_{3\varkappa}(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1}) = 0,$$

so musste das der Differentialgleichung genügende elliptische Integral die Form haben

$$(217)\ \cdots\cdot\ z_1 = \int^{u_1}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}},$$

worin u_1 und $\sqrt{u_1^3-1}$ rationale Functionen von $x,\ Y_1, \cdots\ Y_{m-1}$ und y bedeuten. Lässt man nun x continuirlich geschlossene Umkreise beschreiben von der Art, dass y, während $Y_1, \cdots\ Y_{m-1}$ ihre ursprünglichen Werthe wieder annehmen, in εy und $\varepsilon^2 y$ übergeht, worin $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist, so werden die Werthe der elliptischen Integrale

$$(218)\ \cdots\cdot\ z_2 = \int^{u_2}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}},\quad z_3 = \int^{u_3}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}}$$

wiederum Integrale der so entstehenden Differentialgleichungen sein, und es werden die Beziehungen statthaben

$$(219)\begin{cases} u_1 = f(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1},\ y) & \sqrt{u_1^3-1} = F(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1},\ y) \\ u_2 = f(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1},\ \varepsilon y) & \sqrt{u_2^3-1} = F(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1},\ \varepsilon y) \\ u_3 = f(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1},\ \varepsilon^2 y) & \sqrt{u_3^3-1} = F(x,\ Y_1, \cdot\cdot\ Y_{m-1},\ \varepsilon^2 y), \end{cases}$$

worin f und F rationale Functionen bedeuten. Nun folgt aber aus

den drei Gleichungen

$$\frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_1}{dx} = y$$

$$\frac{d^m z_2}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_2}{dx} = \varepsilon y$$

$$\frac{d^m z_3}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_3}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_3}{dx} = \varepsilon^2 y,$$

wie man durch Multiplication derselben mit 1, ε^2, ε und Addition ersieht, dass

$$z = \frac{z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3}{3}$$

ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein wird, und es bleibt somit nur die Summe der elliptischen Integrale (indem wir den Factor $\frac{1}{3}$ fortlassen)

$$\int^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}} + \varepsilon^2 \int^{u_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}} + \varepsilon \int^{u_3} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}$$

zu untersuchen übrig. Setzen wir in dem Differentialausdruck

$$\frac{du_1}{\sqrt{u_1^3 - 1}} + \frac{\varepsilon^2 du_2}{\sqrt{u_2^3 - 1}} + \frac{\varepsilon du_3}{\sqrt{u_3^3 - 1}}$$

$$(220) \cdots\cdots u_1 = U_1, \quad u_2 = \varepsilon U_2, \quad u_3 = \varepsilon^2 U_3,$$

so geht derselbe über in

$$\frac{dU_1}{\sqrt{U_1^3 - 1}} + \frac{dU_2}{\sqrt{U_2^3 - 1}} + \frac{dU_3}{\sqrt{U_3^3 - 1}},$$

worin nach den Gleichungen (219)

$$(221) \begin{cases} U_1 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) & \sqrt{U_1^3 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) \\ U_2 = \varepsilon^2 f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon y) & \sqrt{U_2^3 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon y) \\ U_3 = \varepsilon f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^2 y) & \sqrt{U_3^3 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^2 y) \end{cases}$$

sein wird.

Setzen wir zum Zwecke der Addition jener 3 elliptischen Differentiale nach dem Abel'schen Theorem in schon früher benutzter Form

$$(222) \cdots\cdots a_2 U^2 + a_1 U + a_0 - b\sqrt{U^3 - 1} = 0,$$

welcher Gleichung die 3 Werthe U_1, U_2, U_3 mit den zugehörigen Irrationalitäten genügen sollen, so folgen nach (221) für die Constanten a_2, a_1, a_0, b, indem wir alle nach dem Modul 3 congruenten

Potenzen von y zusammenfassen, die drei Bestimmungsgleichungen:

$$(223)\quad \begin{cases} a_2(P_2+Q_2y+R_2y^2)+a_1(P_1+Q_1y+R_1y^2) \\ \qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}y+\mathfrak{R}y^2)=0 \\ a_2\varepsilon(P_2+Q_2\varepsilon y+R_2\varepsilon^2y^2)+a_1\varepsilon^2(P_1+Q_1\varepsilon y+R_1\varepsilon^2y^2) \\ \qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\varepsilon y+\mathfrak{R}\varepsilon^2y^2)=0 \\ a_2\varepsilon^2(P_2+Q_2\varepsilon^2y+R_2\varepsilon y^2)+a_1\varepsilon(P_1+Q_1\varepsilon^2y+R_1\varepsilon y^2) \\ \qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\varepsilon^2y+\mathfrak{R}\varepsilon y^2)=0, \end{cases}$$

worin $P_2, Q_2, R_2, P_1, Q_1, R_1, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ rationale Functionen von x, $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ und y^3 sind.

Multiplicirt man dieses Gleichungssystem der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon, \end{matrix}$$

und addirt je drei Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} a_2\cdot R_2y^2 + a_1\cdot Q_1y + a_0\cdot 1 - b\cdot\mathfrak{P} &= 0 \\ a_2\cdot Q_2y + a_1\cdot P_1 + a_0\cdot 0 - b\cdot\mathfrak{R}y^2 &= 0 \\ a_2\cdot P_2 + a_1\cdot R_1y^2 + a_0\cdot 0 - b\cdot\mathfrak{Q}y &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus wiederum durch Multiplication der drei Gleichungen mit $1, y, y^2$, wenn ausserdem die eine Constante $=1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} a_1\cdot L_1y + a_0\cdot 1 - b\cdot M_1 &= N_1y^2 \\ a_1\cdot L_2y + a_0\cdot 0 - b\cdot M_2 &= N_2y^2 \\ a_1\cdot L_3y + a_0\cdot 0 - b\cdot M_3 &= N_3y^2, \end{aligned}$$

worin $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$ rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ und y^3 sind. Somit wird also, wenn $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, den Charakter ebensolcher Functionen haben,

$$(224)\quad \cdots\cdots a_1=\mathfrak{U}\cdot y,\quad a_0=\mathfrak{V}\cdot y^2,\quad b=\mathfrak{W}\cdot y^2$$

sein, und sich daher vermöge der Gleichung

$$(a_2U^2+a_1U+a_0)^2-b^2(U^3-1)=(U-U_1)(U-U_2)(U-U_3)(U-V),$$

aus welcher für $U=0$

$$a_0{}^2+b^2=U_1U_2U_3V$$

hervorgeht, nach (221) und vermöge des Umstandes, dass

$$U_1U_2U_3=f(x,Y_1,\cdots Y_{m-1},y)f(x,Y_1,\cdots Y_{m-1},\varepsilon y)f(x,Y_1,\cdots Y_{m-1},\varepsilon^2y)$$

sich als rationale symmetrische Function von $y, \varepsilon y, \varepsilon^2y$ rational durch $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^3 ausdrücken lässt, die Bestimmungsgleichung

$$V=T\cdot y$$

ergeben, worin T eine rationale Function von x, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$, y^3 bedeutet, und V der Gleichung genügt

$$\frac{dU_1}{\sqrt{U_1^3-1}} + \frac{dU_2}{\sqrt{U_2^3-1}} + \frac{dU_3}{\sqrt{U_3^3-1}} = \frac{dV}{\sqrt{V^3-1}};$$

zugleich folgt aus der Gleichung (222) die zu V gehörige Irrationalität in der Form

$$\sqrt{V^3-1} = \frac{V^2 + a_1 V + a_0}{b},$$

oder nach (224)

$$\sqrt{V^3-1} = \frac{T^2 + T\mathfrak{U} + \mathfrak{V}}{\mathfrak{W}} = T_1$$

eine rationale Function von x, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$, y^3.

Wir finden somit den folgenden Satz:

Wenn einer Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

unter den festgestellten Bedingungen für die reducirte Differentialgleichung, wobei y einer Gleichung von der Form genügen soll

$$y^{3\varkappa} + \varphi_3(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) y^{3\varkappa-3} + \cdots + \varphi_{3\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

ein elliptisches Integral genügt, so gehört dieses jedenfalls zur Irrationalität $\sqrt{\xi^3-1}$, und die Differentialgleichung hat dann auch stets das Integral

$$\frac{1}{3}\int^{V} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}},$$

worin

$$(225) \cdots\cdots V = T \cdot y, \quad \sqrt{V^3-1} = T_1$$

sind, wenn T und T_1 rationale Functionen von x, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^3 bedeuten.

Durch diesen Satz ist aber wiederum die Möglichkeit gegeben, alle jene Differentialgleichungen aufzustellen, die durch elliptische Integrale befriedigt werden, wenn y einer Gleichung der obigen Form genügt. Denn setzt man $y^3 = t$, so hat man nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dass, wenn eine Function t durch eine algebraische Gleichung

$$t^\varkappa + \varphi_3(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1} + \cdots + \varphi_{3\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0$$

definirt ist, deren Coefficienten passend zu bestimmen sind, nach (225) eine Substitution

$$V = \frac{\omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t + \cdots + \omega_{1-\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) t^{\varkappa-1}}{\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})} \cdot \sqrt[3]{t},$$

in welcher $\omega_0, \omega_1, \cdots \omega_{\varkappa-1}, \omega$ zu bestimmende ganze Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, gefunden werde von der Art, dass

$$\sqrt{\left(\frac{\omega_0(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})t + \cdots + \omega_{\varkappa-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})t^{\varkappa-1}}{\omega(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})}\right)^3 t - 1}$$

eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und t ist, worin unter der Quadratwurzel — und das war der Zweck jener Transformation — nur eine rationale Function von t vorkommt. Die Methode, alle zugehörigen Differentialgleichungen aufzustellen, ist wiederum im Früherem enthalten.

Ist ferner $\mu = 4$, also y durch eine Gleichung der Form definirt
$$y^{4\varkappa} + \varphi_4(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})y^{4\varkappa-4} + \cdots + \varphi_{4\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$
so musste das der Differentialgleichung genügende elliptische Integral die Form haben

$$(226) \cdots\cdots z_1 = \int^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}},$$

worin u_1 und $\sqrt{u_1^4 - 1}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y sind.

Lässt man nun x solche geschlossene Umkreise beschreiben, dass y ohne Aenderung der Grössen $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ in $-y, iy, -iy$ übergeht, so wird genau nach den für den vorigen Fall gemachten Auseinandersetzungen auch

$$(227)\ z = \frac{1}{4}\left\{\int^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} - i\int^{u_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} - \int^{u_3} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} + i\int^{u_4} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}\right\}$$

ein Integral der Differentialgleichung sein, worin

$$u_1 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) \qquad \sqrt{u_1^4 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)$$
$$u_2 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, iy) \qquad \sqrt{u_2^4 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, iy)$$
$$u_3 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -y) \qquad \sqrt{u_3^4 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -y)$$
$$u_4 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -iy) \qquad \sqrt{u_4^4 - 1} = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -iy)$$

ist, wenn f und F rationale Functionen bedeuten. Setzt man nun wieder wie früher, indem man $u_1 = U_1$, $u_2 = -iU_2$, $u_3 = -U_3$, $u_4 = -iU_4$ macht, die Summe der so entstehenden 4 elliptischen Integrale nach dem Abel'schen Theorem zu *einem* elliptischen Integrale zusammen, so ergiebt sich leicht, *dass das Integral der Differentialgleichung in*

$$z = \frac{1}{4}\int^{V} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}$$

übergeht, worin

$$V = T \cdot y, \quad \sqrt{V^4 - 1} = T_1,$$

wenn T und T_1 rationale Functionen von x, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^4 bedeuten, und auch hier ist sofort zu sehen, dass es vermöge der eben angegebenen Reduction des elliptischen Integrales auf ein solches mit der Grenze V wiederum möglich ist, die Form aller dahin gehörigen Differentialgleichungen zu bestimmen, da der Ausdruck $\sqrt{V^4-1}$ wieder nur von y^4 abhängig ist.

Ist endlich $\mu = 6$, also y durch die Gleichung bestimmt

$$y^{6\varkappa} + \varphi_6(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})\, y^{6\varkappa-6} + \cdots + \varphi_{6\varkappa}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

so musste das der Differentialgleichung genügende elliptische Integral die Form haben

$$z_1 = \int^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi^3-1)}},$$

worin u_1 und $\sqrt{u_1(u_1^3-1)}$ rationale Functionen von x, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y sind; genau in der besprochenen Weise folgt, *dass dann auch*

$$z = \frac{1}{6}\int^{V} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi^3-1)}}$$

der Differentialgleichung genügt, worin

$$V = T \cdot y^2, \quad \sqrt{V(V^3-1)} = T_1 \cdot y$$

und T und T_1 rationale Functionen von x, $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^6 sind, und ebenso erhellt aus dieser Reduction wieder die Möglichkeit der Aufstellung aller dazugehörigen Differentialgleichungen.

Für den Fall der einfachsten Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ liefern also die gegebenen Sätze die einzigen Formen der elliptischen Integrale, auf welche Abel'sche Integrale, deren Irrationalität einer Gleichung von der Form (210) genügt, reducirbar sind, und zugleich das Mittel, die Abel'schen Integrale sämmtlich aufzustellen, welche dieser Bedingung unterliegen. Greifen wir z. B. den Fall heraus, in welchem y durch die Gleichung definirt ist

$$y^3 = \frac{\omega(x)^3}{R(x)^\varrho},$$

worin $R(x)$ und $\omega(x)$ ganze Functionen von x, und ϱ eine ganze Zahl bedeutet, so wissen wir nach den eben entwickelten Sätzen, dass, weil die reducirte Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ nur ein constantes Integral besitzt, wenn das Abel'sche Integral erster Gattung $\int y\,dx$ auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, nothwendig

$$\int^{x} y\,dx = \frac{1}{3}\int^{V} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}}$$

sein wird, worin

$$(228) \cdots\cdots V = \frac{f(x)\,\omega(x)}{\sqrt[3]{R(x)^\varrho}} \quad \text{und} \quad \sqrt{V^3 - 1} = F(x),$$

$f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen von x sind. Setzt man nun den Werth von V in $\sqrt{V^3 - 1}$ ein, so hat man die rationale Function $f(x)$ so zu bestimmen, dass

$$\sqrt{\frac{f(x)^3 \cdot \omega(x)^3 - R(x)^\varrho}{R(x)^\varrho}}$$

eine rationale Function von x ist — und diese Aufgabe lässt sich bekanntlich unmittelbar mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten lösen, indem man die in den Polynomen vorkommenden Constanten so bestimmt, dass das Polynom unter der Quadratwurzel nur doppelte Factoren hat, woraus sich für die zu bestimmenden Coefficienten gerade so viel Bedingungsgleichungen ergeben als Doppelfactoren vorkommen. Umgekehrt sieht man aber auch leicht, dass, wenn $f(x)$, $\omega(x)$ und $R(x)$ als rationale Functionen von x so bestimmt werden können, dass, wenn

$$V = \frac{f(x)\,\omega(x)}{\sqrt[3]{R(x)^\varrho}}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{V^3 - 1}$$

gleich einer rationalen Function $F(x)$ ist, dann

$$dV = \left[-\frac{\varrho}{3} f(x)\,\omega(x)\,\frac{R'(x)}{R(x)} + \frac{d}{dx}\big(f(x)\,\omega(x)\big)\right] \frac{1}{\sqrt[3]{R(x)^\varrho}}\,dx$$

also

$$\frac{dV}{\sqrt{V^3 - 1}} = \frac{-\frac{\varrho}{3} f(x)\,\omega(x)\,R'(x) + \frac{d}{dx}\big(f(x)\,\omega(x)\big)\,R(x)}{R(x)\,F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)^\varrho}}$$

wird, d. h. ein zur Irrationalität $\sqrt[3]{R(x)}$ gehöriges Integral auf ein elliptisches Integral reducirbar ist. Um ein einfaches Beispiel hierfür durchzuführen, setze man

$$y = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}\right)^2},$$

so ist nach der angegebenen Methode $f(x)$ so zu bestimmen, dass, wenn man

$$V = \frac{f(x)}{\left(\sqrt[3]{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}\right)^2}.$$

setzt, der Ausdruck

$$\sqrt{V^3 - 1} = \frac{\sqrt{f(x)^3 - (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 (x-\gamma)^2}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

eine rationale Function von x wird. Dies ist aber für beliebige Werthe von α, β, γ möglich; denn setzt man

$$f(x) = \sqrt[3]{c}\,(x-\beta)(x-\gamma),$$

worin c eine noch zu bestimmende Constante bedeutet, so erhält man

$$\sqrt{V^3-1} = \frac{1}{x-\alpha}\sqrt{c(x-\beta)(x-\gamma)-(x-\alpha)^2},$$

und bestimmt man endlich c so, dass das Polynom unter der Wurzel eine doppelte Lösung hat, also derart, dass c der Gleichung genügt

$$c(\beta-\gamma)^2 - 4\alpha(\beta+\gamma) + 4\beta\gamma + 4\alpha^2 = 0,$$

so erhält man, wie leicht zu sehen,

$$\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}\right)^2} = m\frac{dV}{\sqrt{V^3-1}},$$

worin m eine Constante bedeutet, somit die bekannte Reduction von Legendre für willkürliche α, β, γ, und ähnlich andere Reductionsformeln für $y = \sqrt[m]{R(x)}$, worauf wir nicht weiter eingehen wollen.

Dehnen wir nun diese Untersuchungen auf solche Differentialgleichungen aus, für welche die rechte Seite y nicht mehr auf Gleichungen von der Form (202) beschränkt ist oder der Bedingung unterliegt, dass man x solche Umläufe machen lassen kann, dass eine Lösung y_1 ohne Veränderung der Werthe $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ in εy_1 übergeht, woraus ε als Einheitswurzel gefolgert war. Eben diese Annahme konnte auch in der Form ausgesprochen werden, dass zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung (200) eine lineare homogene Relation

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

besteht, in welcher a_1 und a_2 rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}$ sind, indem früher bewiesen war, dass, wenn für eine irreductible Gleichung zwei Lösungen derselben in der Relation $y_2 = k y_1$ stehen, k nothwendig eine Constante und zwar eine Einheitswurzel sein muss*). Betrachten wir jetzt Beziehungen zwischen mehr als zwei

*) Wir wollen noch eine einfache Bemerkung hinzufügen, welche sich auf die Reduction der Integrale algebraischer Functionen bezieht. Nehmen wir an, dass y_1 die Lösung einer algebraischen irreductibeln Gleichung sei, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, und stehe eine andere Lösung y_2 derselben mit y_1 in der nicht homogenen linearen Beziehung

$$y_2 = \varepsilon y_1 + \delta,$$

worin ε und δ rationale Functionen von x sein mögen, so folgt nach bekannten Eigenschaften der irreductibeln algebraischen Gleichungen, dass die successive iterirten Functionen

$$\varepsilon^2 y_1 + \delta(\varepsilon+1),\ \varepsilon^3 y_1 + \delta(\varepsilon^2+\varepsilon+1), \cdots \varepsilon^r y_1 + \delta(\varepsilon^{r-1}+\varepsilon^{r-2}+\cdots+\varepsilon+1)$$

Lösungen einer irreductibeln Gleichung, so ist vor allem leic sehen, dass, wenn $y_1, y_2, \cdots y_r$ die zu einem Cyclus geh Functionalwerthe für irgend einen Verzweigungspunkt der algebra Function bedeuten, so dass

$$229)\left\{\begin{aligned} y_1 &= \psi_0(x) + \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{r}} + \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{r}} + \cdots + \psi_{r-1}(x)(x \\ y_2 &= \psi_0(x) + \varepsilon\psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{r}} + \varepsilon^2\psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{r}} + \cdots + \varepsilon^{r-1}\psi_{r-1}(\\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_r &= \psi_0(x) + \varepsilon^{r-1}\psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{r}} + \varepsilon^{2(r-1)}\psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{r}} + \cdots \\ &\cdots + \varepsilon^{(r-1)(r-1)}\psi_{r-1}(x)(x-\alpha)^{\frac{r}{}} \end{aligned}\right.$$

---

wieder einmal auf y_1 zurückführen müssen, und dass daher

$$\varepsilon^r y_1 + \delta(\varepsilon^{r-1} + \varepsilon^{r-2} + \cdots + \varepsilon + 1) = y_1$$

sein muss, und somit, da y_1 keine rationale Function von x sein kann,

$$\varepsilon^r = 1, \ \varepsilon^{r-1} + \varepsilon^{r-2} + \cdots + \varepsilon + 1 = 0$$

d. h. ε eine r^{te} Einheitswurzel, wie in dem Falle, in welchem $\delta = 0$ w wollen zeigen, dass für eine algebraische Function y_1, welche einer irred Gleichung genügt, für welche eine zweite Lösung die Form $\varepsilon y_1 +$ $\int y_1\,dx$ überhaupt nicht auf ein elliptisches Integral erster Gattung red sein kann; denn wäre

$$\int y_1\,dx = \int^{\eta} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

worin η und $\Delta(\eta)$ rational durch x und y_1 ausdrückbar sein müssten, man durch einen entsprechenden Umlauf von x zu der Beziehung

$$\int(\varepsilon y_1 + \delta)\,dx = \int^{\eta_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

gelangen, worin auch η_1 und $\Delta(\eta_1)$ rational durch x und y_1 ausdrüc und erhielte somit

$$\int \delta\,dx = \int^{\eta_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \varepsilon \int^{\eta} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)};$$

da aber die Integrale der rechten Seite nie unendlich werden, dage Integral einer rationalen Function von x sich findet, so ist die Ann duction auf ein elliptisches Integral erster Gattung unmöglich, wenn

Man kann aber auch schliessen, dass $\int y_1\,dx$ überhaupt kein Abel erster Gattung sein kann, weil dann, wie aus einem Umlaufe vo $\int(\varepsilon y_1 + \delta)\,dx$, also auch $\int \delta\,dx$ ein Integral erster Gattung s würde sich dies auch folgern lassen aus der Beschaffenheit d definirenden algebraischen Gleichung.

ist, worin ε eine primitive r^{te} Einheitswurzel und $\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots \psi_{r-1}(x)$ nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende Reihen bedeuten, sich unmittelbar

$$(230) \cdots\cdot y_1 + y_2 + \cdots + y_r = r\psi_0(x)$$

ergiebt, also jedenfalls eine lineare, im Allgemeinen nicht homogene Relation zwischen den Gliedern eines Cyclus stattfindet, in welcher das von den y freie Glied eine nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende Reihe ist — und dies ist selbstverständlich, weil die Summe der y um α herum eindeutig sein muss.

Nehmen wir nun an, es bestehe zwischen einer Anzahl von Zweigen einer algebraischen Function eine lineare Relation

$$(231) \cdots\cdot a_1 y_{\varrho_1} + a_2 y_{\varrho_2} + \cdots + a_\varkappa y_{\varrho_\varkappa} + b_1 y_{\sigma_1} + b_2 y_{\sigma_2} + \cdots$$
$$\cdots + b_\lambda y_{\sigma_\lambda} + \cdots = A,$$

worin $a_1, a_2, \cdots b_1, b_2 \cdots$ und A rationale Functionen von x sind, und von denen für irgend einen Verzweigungspunkt der algebraischen Function $y_{\varrho_1}, y_{\varrho_2}, \cdots y_{\varrho_\varkappa}$ y-Werthe aus *einem* Cyclus von P Elementen, $y_{\sigma_1}, y_{\sigma_2}, \cdots y_{\sigma_\lambda}$ y-Werthe aus einem anderen Cyclus von Σ Elementen etc. sein sollen. Mögen nun die Cyclen nicht gleichviel Elemente haben, und sei P der kleinste Cyclus, so werden, wenn man x P Umläufe beschreiben lässt, $y_{\varrho_1}, y_{\varrho_2}, \cdots y_{\varrho_\varkappa}$ wieder zu ihren Werthen zurückgekommen sein, während y_{σ_1} in y'_{σ_1}, y_{σ_λ} in $y'_{\sigma_2}, \cdots y_{\sigma_\lambda}$ in y'_{σ_λ} etc. übergegangen sein mögen — und y_{σ_r} kann nicht y'_{σ_r} gleich sein, da dies erst nach Σ Umläufen der Fall sein wird; zieht man die so erhaltene Gleichung von der ersten ab, so folgt

$$(232) \cdots\cdot b_1(y'_{\sigma_1} - y_{\sigma_1}) + b_2(y'_{\sigma_2} - y_{\sigma_2}) + \cdots$$
$$\cdots + b_\lambda(y_{\sigma_\lambda} - y_{\sigma_\lambda}) + \cdots = 0.$$

Nun könnte freilich diese Gleichung eine identische sein, indem z. B. für $b_1 = b_2$: $y'_{\sigma_1} - y_{\sigma_1} + y'_{\sigma_2} - y_{\sigma_2} = 0$ sein könnte und ähnliche Beziehungen, wie z. B. wenn y_{σ_1} in y_{σ_2} und y_{σ_2} in y_{σ_1} übergeht; in diesem Falle würde man den ersten Cyclus von P Elementen zweimal beschreiben, wodurch im Allgemeinen nicht wieder beim Abziehen sich eine identische Gleichung ergeben würde; so würde die Gleichung (232) wieder eine lineare Beziehung unter den y darstellen, aber für jenen Verzweigungspunkt aus Elementen von weniger Cyclen; gehen wir nunmehr von dieser Gleichung aus, so können wir wieder im Allgemeinen die y-Werthe eines Cyclus herausschaffen u. s. w., bis wir auf eine lineare Beziehung zwischen den Elementen *eines* Cyclus kommen werden. Nur in *einem* Falle tritt eine Schwierigkeit ein, wenn nämlich $P = \Sigma \cdots$ also die Anzahl der Elemente der Cyclen gleich gross ist; dann entwickeln sich aber alle einzelnen y nach Potenzen derselben Grösse

$(x-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ und für die Entwicklung um α — und dies allein brauchen wir im Folgenden — ist es also dasselbe, als wenn nur y-Werthe *eines* Cyclus in der Relation vorkämen.

Nehmen wir nunmehr an, wir hätten eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen den y-Werthen *eines* Cyclus, und es sei die Anzahl r der y dieser Relation kleiner als die Zahl m der Elemente des Cyclus selbst, so wird, wenn, unter ε eine m^{te} primitive Einheitswurzel verstanden,

$$y_1 = \psi_0(x) + \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{m}} + \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{m}} + \cdots + \psi_{m-1}(x)(x-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_2 = \psi_0(x) + \varepsilon\psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon^2\psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{m}} + \cdots + \varepsilon^{m-1}\psi_{m-1}(x)(x-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_r = \psi_0(x) + \varepsilon^{r-1}\psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{m}} + \varepsilon^{2(r-1)}\psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{m}} + \cdots + \varepsilon^{(m-1)(r-1)}\psi_{m-1}(x)(x-\alpha)^{\frac{m-1}{m}}$$

gesetzt wird, und jene lineare Relation

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_r y_r = 0$$

ist, offenbar, wenn nicht einzelne der ψ-Functionen verschwinden sollen,

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \cdots + a_r = 0\\
&a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3 + \cdots + \varepsilon^{r-1}a_r = 0\\
&a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 a_3 + \cdots + \varepsilon^{2(r-1)}a_r = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_1 + \varepsilon^{m-1}a_2 + \varepsilon^{2(m-1)}a_2 + \cdots + \varepsilon^{(r-1)(m-1)}a_r = 0
\end{aligned}$$

sein, oder es müsste die Gleichung

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_r x^{r-1} = 0$$

die Lösungen $x = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots \varepsilon^{m-1}$ haben, was nur angeht, wenn $r = m+1$ ist, d. h. alle $y_1, y_2, \cdots y_m$ in der linearen Relation vorkommen, und ausserdem noch eine der ψ-Functionen verschwindet; *wenn somit in einer homogenen linearen Relation zwischen den Zweigen eines Cyclus nicht alle diese Zweige enthalten sind, so müssen mindestens zwei der Functionen $\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots \psi_{m-1}(x)$ verschwinden, d. h. es dürfen in der Entwicklung um den Verzweigungspunkt nicht alle positiven ganzen Potenzen von $(x-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ — wenn nach dem Modul m congruente zusammengefasst sind — vorkommen, oder es müssen in der Entwicklung mindestens für e i n e bestimmte, von Null verschiedene, unter m liegende Zahl μ, die Coefficienten aller Potenzen von $x-\alpha$ von der Form*

$(x-\alpha)^{\frac{p}{m}}$, *worin*

$$p = \mu \, (\mathrm{mod.}\ m)$$

ist, verschwinden.

Umgekehrt ist aber auch leicht zu sehen, dass, wenn die Entwicklung irgend eines Zweiges der Function um einen Verzweigungspunkt herum die angegebene unvollständige Form hat, nothwendig zwischen weniger Zweigen des Cyclus, als dieser Cyclus Elemente besitzt, eine homogene lineare Relation stattfindet, deren Coefficienten eine aus den Einheitswurzeln zusammengesetzte, leicht angebbare Form haben.

Denn sei

$$y_1 = \psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{m}} + \psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{m}} + \cdots + \psi_{\nu_\mu}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_\mu}{m}}$$

$$y_2 = \varepsilon^{\nu_1}\psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{m}} + \varepsilon^{\nu_2}\psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{m}} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}\psi_{\nu_\mu}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_\mu}{m}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{\mu+1} = \varepsilon^{\mu\nu_1}\psi_{\nu_1}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_1}{m}} + \varepsilon^{\mu\nu_2}\psi_{\nu_2}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_2}{m}} + \cdots + \varepsilon^{\mu\nu_\mu}\psi_{\nu_\mu}(x)(x-\alpha)^{\frac{\nu_\mu}{m}},$$

worin $\mu < m-1$ sein soll, und multiplicirt man die letzte Gleichung mit 1, die vorletzte mit $-(\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})$, die drittletzte mit $(\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\varepsilon^{\nu_\mu})$, u. s. w., endlich die erste mit $-(1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu}$, so werden, da die Gleichung

$$x^\mu - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})\, x^{\mu-1} + \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu} = 0$$

die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ hat, die einzelnen Verticalreihen der rechten Seite den Werth Null ergeben, und somit wird aus der linken Seite die lineare Relation folgen

$$(233) \cdots\cdot\ y_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})\, y_\mu + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu} y_1 = 0,$$

worin, weil $\mu < m-1$, also $\mu + 1 < m$ ist, höchstens $m-1$ solcher Werthe aus einem Cyclus in der linearen Relation vorkommen.

Da nun für jede homogene lineare Relation von y-Werthen eines Cyclus, welche weniger Zweige einschliesst als die Anzahl m der Elemente des Cyclus beträgt, in der Entwicklung der angegebenen Form Potenzen von $(x-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ fehlen müssen, und wenn diese fehlen, die lineare Relation die Gestalt (233) haben muss, so folgt, *dass, wenn für die Zweige einer algebraischen Function, welche sich um einen Verzweigungspunkt zu einem Cyclus gruppiren, eine homogene lineare Relation besteht, welche weniger Zweige einschliesst, als die Anzahl m der Elemente des Cyclus beträgt, diese, wenn ε eine primitive mte Einheits-*

wurzel bezeichnet, die Form hat

$$y_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})\, y_\mu$$

$$+ (\varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\varepsilon^{\nu_\mu})\, y_{\mu-1} - \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu}\, y_1 = 0,$$

worin μ eine ganze positive Zahl $< m - 1$ und $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\mu$ positive ganze Zahlen $< m$ bedeuten, selbstverständlich, wenn nicht schon zwischen weniger als $\mu + 1$ dieser Zweige $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ eine homogene lineare Relation besteht, indem die angegebene Beziehung nur die Elementarrelation darstellt, aus der die zusammengesetzten durch Addition sich ergeben.

Nehmen wir nun an, dass der Differentialgleichung

$$(234) \cdots\cdot \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y_1$$

ein elliptisches Integral erster Gattung genüge

$$(235) \cdots\cdot z_1 = \int^{u_1} \frac{d\xi}{\varDelta(\xi)},$$

worin

$$\varDelta(\xi) = \sqrt{(1-\xi^2)(1-c^2\xi^2)},$$

und, wie oben als nothwendig erkannt worden,

$$(236) \cdots\cdot u_1 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y_1), \quad \varDelta(u_1) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y_1),$$

wenn f und F rationale Functionen bedeuten*), so werden, wenn y eine algebraische Function darstellt**), welche für ihre Entwicklung um einen ϱ-fachen Verzweigungspunkt die oben geforderte Eigenschaft besitzt, für deren $\mu + 1$ Zweige eines Cyclus also, wobei $\mu + 1 < \varrho$, eine homogene lineare Relation stattfindet von der Form

$$(237)\ y_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})\, y_\mu + \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu} y_1 = 0,$$

aus wiederholt angegebenen Gründen, indem man x geschlossene Umläufe machen lässt, durch welche y_1 der Reihe nach in $y_2, y_3, \cdots y_{\mu+1}$ übergeht, auch

$$(238) \cdots\cdot z_2 = \int^{u_2} \frac{d\xi}{\varDelta(\xi)}, \quad z_3 = \int^{u_3} \frac{d\xi}{\varDelta(\xi)}, \cdots z_{\mu+1} = \int^{u_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\varDelta(\xi)}$$

Integrale der entsprechenden Differentialgleichungen (234) sein, worin

*) indem anderen Falls nur ein ganzzahliger Theil jenes Integrales an die Stelle tritt.

**) und zwar y als Lösung einer algebraischen irreductibeln Gleichung gedacht, deren Coefficienten rational aus x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_{m-1} zusammengesetzt sind und deren Lösungen daher durch Umläufe erhalten werden, welche Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_{m-1} unverändert lassen.

$$(239)\begin{cases} u_2 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y_2), \quad \Delta(u_2) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{\mu+1} = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y_{\mu+1}), \quad \Delta(u_{\mu+1}) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y_{\mu+1}) \end{cases}$$

ist. Multiplicirt man von den Gleichungen

$$\frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_1}{dx} = y_1$$

$$\frac{d^m z_2}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_2}{dx} = y_2$$

. . . .

$$\frac{d^m z_{\mu+1}}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_{\mu+1}}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_{\mu+1}}{dx} = y_{\mu+1}$$

die letzte mit 1, die vorletzte mit $-(\varepsilon^{\nu_1} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})$, u. s. w., die erste mit $(-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1} \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$, so folgt, wie unmittelbar zu sehen, dass vermöge der Beziehung (237)

$$(240) \cdots\cdot Z_1 = \int^{u_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}) \int^{u_\mu} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1} \varepsilon^{\nu_2} \cdots \varepsilon^{\nu_\mu} \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

ein Integral der reducirten linearen Differentialgleichung

$$(241) \cdots\cdot \frac{d^m Z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} Z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dZ}{dx} = 0$$

sein wird. Nimmt man nun wiederum an, dass die letztere Differentialgleichung entweder durch gar kein Abel'sches Integral befriedigt wird, oder, wenn dieses der Fall ist, nur durch ein elliptisches Integral erster Gattung mit demselben Modul c^2, so wird nothwendig

$$\int^{u_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - (\varepsilon^{\nu_1} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}) \int^{u_\mu} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1} \cdots \varepsilon^{\nu_\mu} \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

sein, worin v constant oder eine algebraische Function von x ist, und wenn man wieder

$$\int^{u_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{w_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

setzt, so erhält man die Beziehung zwischen elliptischen Integralen

$$(242)\int^{w_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - (\varepsilon^{\nu_1} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})\int^{u_\mu}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu}\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0.$$

Nach dem bekannten Abel'schen Satze, der ein specieller Fall des oben bewiesenen allgemeinen Satzes von der Beziehung zwischen Abel'schen Integralen ist, folgt aus dieser Gleichung

$$(243)\quad \delta\int^{w_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - (\varepsilon^{\nu_1} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})\int^{w_\mu}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu}\int^{w_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

worin $w_1, w_2, \cdots w_\mu, \Delta(w_1), \Delta(w_2), \cdots \Delta(w_\mu)$ rationale Functionen von $w_{\mu+1}$ und $\Delta(w_{\mu+1})$ sind; nun ist aber unmittelbar ersichtlich, dass, wenn $w_\varkappa$ und $\Delta(w_\varkappa)$ rationale Functionen von $w_{\mu+1}$ und $\Delta(w_{\mu+1})$ sind, auch

$$\frac{dw_\varkappa}{\Delta(w_\varkappa)}$$

diesen Charakter hat, und weil dies ein Differential erster Gattung ist,

$$(244)\quad\cdots\cdot \int^{w_\varkappa}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = M_\varkappa\int^{w_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

sein muss, worin, da der Modul der beiden in Beziehung gesetzten elliptischen Integrale derselbe ist, $M_\varkappa$ bekanntlich eine ganze Zahl oder von der Form $\frac{1}{2}\left(a_\varkappa + i\sqrt{b_\varkappa}\right)$ sein muss, worin $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die zweite wesentlich positiv ist, in welch' letzterem Falle der Modul c^2 des elliptischen Integrales ein Modul der complexen Multiplication sein wird. Nehmen wir zuerst an, c^2 *sei kein Modul complexer Multiplication*, so dass $M_1, M_2, \cdots M_\mu$ ganze Zahlen bedeuten und setzen wir

$$-(\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}) = A_1, \cdots (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu} = A_\mu,$$

so folgt nach (243) die ganzzahlige lineare Relation zwischen den A-Grössen

$$(245)\quad\cdots\cdot \delta + M_\mu A_1 + M_{\mu-1}A_2 + \cdots + M_1 A_\mu = 0,$$

und setzt man

$$A_\mu = -\frac{\delta + M_\mu A_1 + M_{\mu-1}A_2 + \cdots + M_2 A_{\mu-1}}{M_1}$$

in die Gleichung (242) ein, so ergiebt sich

$$(246)\quad\cdots\cdot \left(M_1\int^{w_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \delta\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right) + A_1\left(M_1\int^{u_\mu}\frac{d}{\Delta(\xi)} - M_\mu\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right)$$

$$+ A_2\left(M_1\int^{u_{\mu-1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_{\mu-1}\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right) + \cdots + A_{\mu-1}\left(M_1\int^{u_2}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_2\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}\right) = 0;$$

nehmen wir nun an, dass die Klammern nicht einzeln verschwinden — welcher Fall nachher untersucht werden soll — so wird, wenn wir mit Hülfe des Additionstheorems

$$(\mathrm{m}) \cdots\cdots M_1 \int^{u_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \delta \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

$$M_1 \int^{u_{\mu-\varrho}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_{\mu-\varrho} \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{v_{\mu-\varrho}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

setzen, die Gleichung (246) übergehen in

$$(247) \cdots \int^{v} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + A_1 \int^{v_\mu} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + A_2 \int^{v_{\mu-1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + A_{\mu-1} \int^{v_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

woraus wieder genau wie oben die ganzzahlige lineare Relation

$$\delta^{(1)} + M_\mu^{(1)} A_1 + M_{\mu-1}^{(1)} A_2 + \cdots + M_2^{(1)} A_{\mu-1} = 0$$

folgt, worin $M_\mu^{(1)}, \cdots M_2^{(1)}$ ganze Zahlen sein müssen, da c^2 nicht ein Modul complexer Multiplication sein sollte; bestimmt man hieraus wieder $A_{\mu-1}$, setzt den Werth in (247) ein und zieht die elliptischen Integrale wieder zusammen, so erhält man eine Relation von der Form

$$(248) \cdots \int^{t} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + A_1 \int^{t_\mu} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + A_2 \int^{t_{\mu-1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + A_{\mu-2} \int^{t_3} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

immer wieder vorausgesetzt, dass die bei der Herleitung dieser Gleichung sich ergebenden, den obigen analogen Einzelklammern nicht verschwinden. Durch Wiederholung derselben Schlüsse gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$(249) \cdots\cdots \int^{s} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + A_1 \int^{s_\mu} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

welche wieder unter der gemachten Voraussetzung die Beziehung nach sich zieht

$$(250) \cdots\cdots \delta^{(\mu-1)} + A_1 M_\mu^{(\mu-1)} = 0,$$

woraus folgt, dass, wenn die im Laufe der Reduction sich ergebenden Einzelklammern nicht verschwinden, und c^2 nicht ein Modul complexer Multiplication ist,

$$A_1 = -(\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu})$$

eine rationale Zahl sein müsste.

Beschränken wir uns nun auf die Untersuchung des Falles, in welchem ϱ eine Primzahl ist, so wird wegen der Irreductibilität der Gleichung

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{\varrho-1} = 0$$

A_1 nur dann eine rationale Zahl sein können, wenn die Gleichung

$$x^{\nu_\mu} + x^{\nu_{\mu-1}} + \cdots + x^{\nu_2} + x^{\nu_1} + A_1 = 0,$$

in welcher der Grad ν_μ höchstens der $\varrho - 1^{\text{te}}$ ist, die Lösung ε haben kann, d. h. wenn

$$\mu = \varrho - 1, \quad \nu_\mu = \varrho - 1, \quad \nu_{\mu-1} = \varrho - 2, \cdots \nu_2 = 2, \quad \nu_1 = 1, \quad A_1 = 1$$

ist, während doch $\mu < \varrho - 1$ sein sollte.

Nehmen wir daher an, dass jene Relation zwischen den Elementen eines Cyclus weniger Elemente enthält als die Ordnung des Cyclus beträgt, oder dass in der Entwicklung der algebraischen Function um einen Verzweigungspunkt herum nicht alle gebrochenen Potenzen von der Form

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}}, \quad (x-\alpha)^{\frac{2}{\varrho}}, \cdots (x-\alpha)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}}$$

vorkommen, so müssen entweder die oben bei der successiven Reduction sich ergebenden Einzelklammern verschwinden, oder c^2 muss ein Modul complexer Multiplication sein. Untersuchen wir nun jene Klammern und nehmen an, dass die sämmtlichen zur ersten Reductionsgleichung gehörigen Klammern verschwinden, so wird in der Gleichung (246)

$$(251) \cdots \begin{cases} M_1 \int^{w_{\mu+1}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \delta \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0 \\ M_1 \int^{u_{\mu-\varrho}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_{\mu-\varrho} \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0 \end{cases}$$

sein; verschwinden die zur zweiten Reductionsgleichung gehörigen Klammern, so erhält man offenbar

$$M_1^{(1)} \int^{v_{\mu-\varrho}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_{\mu-\varrho}^{(1)} \int^{v_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

oder vermöge der Gleichung (m)

$$(252) \cdots M_1 M_1^{(1)} \int^{u_{\mu-\varrho}} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \left(M_1^{(1)} M_{\mu-\varrho} - M_{\mu-\varrho}^{(1)} M_2\right) \int^{u_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$
$$- M_{\mu-\varrho}^{(1)} M_1 \int^{u_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0;$$



führt man so fort, so sieht man, dass das Verschwinden der Einzelklammern jedenfalls zwischen allen oder einigen der elliptischen Integrale der Gleichung (242) eine homogene lineare, nicht identisch verschwindende Relation von der Form nach sich zieht

$$(253) \cdots\cdots L_{\mu+1}\int^{w_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + L_\mu\int^{u_\mu}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + L_1\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

worin $L_1, L_2, \cdots L_{\mu+1}$ ganze Zahlen bedeuten, oder, da oben

$$\int^{u_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \int^{v}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \int^{w_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

gesetzt war,

$$(254) \cdots\cdots L_{\mu+1}\int^{u_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + L_\mu\int^{u_\mu}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + L_1\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = L_{\mu+1}\int^{v}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

woraus folgt, dass, weil die einzelnen Integrale

$$z_1 = \int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}, \quad z_2 = \int^{u_2}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}, \cdots\cdots z_{\mu+1} = \int^{u_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

Integrale der vorgelegten nicht homogenen linearen Differentialgleichung darstellten, wenn die rechten Seiten resp. $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ waren, der Ausdruck

$$L_{\mu+1}\int^{u_{\mu+1}}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + L_\mu\int^{u_\mu}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} + \cdots + L_1\int^{u_1}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(255) \cdots\cdots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx}$$
$$= L_{\mu+1}y_{\mu+1} + L_\mu y_\mu + \cdots + L_1 y_1$$

ist, und somit auch nach Gleichung (254)

$$L_{\mu+1}\int^{v}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

ein Integral von (255). Da aber nach der für die Gleichung (241) gemachten Annahme

$$\int^{v}\frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

ein Integral der reducirten Differentialgleichung ist, somit auch dieser Werth mit der Constanten L multiplicirt die linke Seite von (255) zu Null macht, so ergiebt sich

$$(256) \cdots\cdots L_{\mu+1}y_{\mu+1} + L_\mu y_\mu + \cdots + L_1 y_1 = 0,$$

worin die Grössen L ganze Zahlen bedeuten; da aber nicht schon zwischen weniger als $\mu+1$ der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ des Cyclus eine lineare homogene Gleichung stattfinden sollte, so muss die Relation (256) mit (233) übereinstimmen, oder es muss

$$-\frac{L_\mu}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}$$

$$\frac{L_{\mu-1}}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1}\cdot\varepsilon^{\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1}\cdot\varepsilon^{\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\cdot\varepsilon^{\nu_\mu} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1+\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}+\nu_\mu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{L_1}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1}\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\mu}$$

sein; da aber die Summe von ε-Potenzen nur einer rationalen Zahl oder Null gleich sein kann, wenn sie sämmtlich in dieser Summe vorkommen, so würde das Bestehen der obigen Gleichungen wieder erfordern, dass in der Entwicklung der algebraischen Function um jenen Verzweigungspunkt in dem angegebenen Sinne alle gebrochenen Potenzen vorkommen müssen, es können somit — diesen Fall ausgeschlossen — auch die bei der obigen successiven Reduction sich ergebenden Einzelklammern nicht verschwinden, und es ergiebt sich somit der nachfolgende Satz:

Genügt einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y$$

ein elliptisches Integral erster Gattung, und kommen in der Entwicklung der Function y um irgend einen ihrer Verzweigungspunkte α für einen primzahligen Cyclus ϱ nach Zusammenfassen der gleichen gebrochenen Potenzen nicht a l l e *Potenzen*

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}},\quad (x-\alpha)^{\frac{2}{\varrho}},\cdots (x-\alpha)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}}$$

vor, so ist der Modul des elliptischen Integrales ein Modul complexer Multiplication, wenn die reducirte Differentialgleichung der angegebenen Beschränkung unterliegt.

Ist aber nun c^2 ein Modul complexer Multiplication, so musste $M_\varkappa$, wenn es nicht eine ganze Zahl war, nothwendig die Form haben $\frac{1}{2}(a_\varkappa + ib_\varkappa)$, worin $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ ganze Zahlen bedeuteten, von denen die letztere wesentlich positiv ist, und es bleiben offenbar alle früher gemachten Schlüsse gültig, bis wir zur Beziehung (250) gelangen, aus der vermöge der eben angegebenen Form von $M_\mu^{(\mu-1)}$ nur gefolgert werden kann, dass

$$(257) \quad \cdots\cdot \varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu} = p + ir\sqrt{q}$$

ist, worin p, r, q rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere positiv oder Null ist und ohne quadratische Theiler angenommen werden darf. Vorausgesetzt wurde jedoch, um zur Gleichung (250) also zu der analogen (257) zu gelangen, dass die bei der Reduction successive auftretenden Einzelklammern nicht verschwinden; ist dies aber der Fall, so ergiebt sich für die der Gleichung (256) analoge Gleichung

$$(258) \cdots\cdot (P_{\mu+1} + i\, Q_{\mu+1} \sqrt{q})\, y_{\mu+1} + (P_\mu + i Q_\mu \sqrt{q})\, y_\mu + \cdots + (P_1 + i\, Q_1 \sqrt{q})\, y_1 = 0,$$

und setzt man die früher aufgestellten Entwicklungsformen der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ ein, so folgt unmittelbar, dass die Gleichung

$$(259) \cdots\cdot (P_{\mu+1} + i\, Q_{\mu+1} \sqrt{q}) x^\mu + (P_\mu + i\, Q_\mu \sqrt{q}) x^{\mu-1} + \cdots + P_1 + i\, Q_1 \sqrt{q} = 0$$

die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ haben muss; es wird also entweder das letztere stattfinden, oder es wird die Gleichung (257) gelten, anders ausgedrückt, es wird entweder die Gleichung (259) die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ besitzen, oder es wird die Gleichung

$$(260) \cdots\cdot x^{\nu_1} + x^{\nu_2} + \cdots + x^{\nu_\mu} = p + i r \sqrt{q}$$

die Lösung ε haben. Die Vergleichung der Beziehungen (259) und (260) mit den Kreistheilungsgleichungen und deren Zerlegungsformen liefert leicht das Resultat, *dass, wenn in der Entwicklung von y um einen primzahligen ϱ-fachen Verzweigungspunkt herum nicht alle Potenzen von* $(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}}$ *vorkommen und* $\varrho \equiv 3 \,(\text{mod. } 4)$ *ist, einerseits der Modul des elliptischen Integrales, welches ein Integral der linearen nicht homogenen Differentialgleichung ist, unter den bekannten Beschränkungen für die reducirte Differentialgleichung ein Modul der complexen Multiplication ist, andererseits folgt, dass die Entwicklungsform von y*

$$y = \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\varrho}} + \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\varrho}} + \cdots + \psi_{\frac{\varrho-1}{2}}(x)(x-\alpha)^{\frac{\varrho_{\frac{\varrho-1}{2}}}{\varrho}}$$

sein muss, worin $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{\frac{\varrho-1}{2}}$ *entweder alle* $\frac{\varrho-1}{2}$ *quadratischen Reste oder alle* $\frac{\varrho-1}{2}$ *quadratischen Nichtreste von ϱ bedeuten; zugleich ergiebt sich, dass* $\sqrt{-\varrho}$ *der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales sein wird, und dass nach früher entwickelten Sätzen auch der complexe Integralmodul bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist.*

Auf weitere Untersuchungen, welche den Fall $\varrho \equiv 1 \pmod{4}$ betreffen und auf zusammengesetzte ϱ ausgedehnt werden können, wollen wir hier nicht weiter eingehen, und nur noch auf die ähnlichen Untersuchungen hinweisen, welche die complexe Multiplication der hyperelliptischen und Abel'schen Integrale berühren.

Nehmen wir an, dass die Differentialgleichung

$$(261) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

durch ein hyperelliptisches Integral erster Gattung — und auf Integrale erster Gattung konnte das Problem, wie oben gezeigt worden, stets zurückgeführt werden — befriedigt werde, so war früher nachgewiesen, dass auch stets, von einem Zahlenfactor abgesehen, ein Integral der Differentialgleichung von der Form existirt

$$(262) \cdots z = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \int^{u_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \cdots + \int^{u_p} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}},$$

worin $f(\xi)$ eine ganze Function höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, $\varphi(\xi)$ ein ganzes Polynom vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, und

$$u_1, u_2, \cdots u_p$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(263) \quad u^p + f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)\, u^{p-1} + \cdots + f_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0$$

sind, deren Coefficienten rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind

$$(264) \cdots \sqrt{\varphi(u_r)} = F(u_r, x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y),$$

in der F wiederum eine rationale Function bezeichnet. Machen wir nunmehr die oben für den Fall, dass die Differentialgleichung durch ein elliptisches Integral befriedigt wird, zu Grunde gelegte Voraussetzung, dass zwischen zwei Zweigen der algebraischen Function y eine homogene lineare Relation besteht, oder dass

$$(265) \cdots y_1 = \varepsilon y,$$

worin ε, wie gezeigt worden, eine μ^{te} Einheitswurzel sein musste, und die die Grösse y definirende algebraische Gleichung die Form hatte

$$(266) \quad y^{\varkappa\mu} + \varphi_\mu(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})\, y^{(\varkappa-1)\mu} + \cdots + \varphi_{\varkappa\mu}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

so folgt genau wie früher, dass der Ausdruck

$$(267) \cdots z_1 = \int^{v_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \int^{v_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \cdots + \int^{v_p} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(268) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = \varepsilon y$$

ist, wenn $v_1, v_2, \cdots v_p$ Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(269)\ v^p + f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon y) v^{p-1} + \cdots + f_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon y) = 0$$

sind, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind

$$(270) \cdots \sqrt{\varphi(v_r)} = F(v_r, x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon y),$$

und dass somit die reducirte lineare Differentialgleichung

$$(271) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

das Integral besitzt

$$(272) \cdots z = \sum_1^p {}_r \int^{v_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \varepsilon \sum_1^p {}_r \int^{u_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

Nehmen wir nunmehr wieder wie oben an, dass die reducirte Differentialgleichung entweder durch gar kein Integral einer algebraischen Function befriedigt wird, oder dass, wenn dies der Fall ist, sich dieses durch dieselben hyperelliptischen Integrale erster Gattung mit der Irrationalität $\sqrt{\varphi(\xi)}$ darstellen lässt, so würde jedenfalls

$$(273) \cdots \sum_1^p {}_r \int^{v_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \varepsilon \sum_1^p {}_r \int^{u_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \sum_1^\varrho {}_r \int^{w_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

sein, worin $w_1, w_2, \cdots w_\varrho$ zum Theil oder auch alle constant sein können, und man erhält somit, wenn nach dem Abel'schen Theorem

$$(274) \cdots \sum_1^p {}_r \int^{v_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \sum_1^\varrho {}_r \int^{w_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \sum_1^p {}_r \int^{U_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

gesetzt wird, die nothwendige Beziehung

$$(275) \cdots \sum_1^p {}_r \int^{U_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \varepsilon \sum_1^p {}_r \int^{u_r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

Aus dieser Gleichung können wir aber sofort auf bestimmte Formen des Polynoms $\varphi(\xi)$ schliessen; bezeichnen wir nämlich die Periodicitätsmoduln des Integrales erster Gattung

$$\int \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

an den $2p$ Querschnitten mit

$$\omega_1, \omega_1', \omega_2, \omega_2', \cdots \omega_{2p}, \omega_{2p}'$$

und bemerken, dass zwischen den u_r und U_r ein algebraischer Zusammenhang besteht, so folgt leicht, dass, wenn man in der Gleichung (275) einen der Integrationswege der u-Variabeln den ersten Querschnitt einmal schneiden lässt, auf der linken Seite, da die rechte Seite in den Grenzen unverändert geblieben ist, und nur um eine additive Constante vermehrt worden, die Grenzen nur in die anderen Lösungen der zwischen den U und u bestehenden algebraischen Beziehungen übergegangen sein können, und dass, weil die Anzahl der U-Werthe nur eine endliche ist, wir jedenfalls den ersten Querschnitt so oft werden durchschneiden können, bis einmal zwei Werthesysteme der p Grössen U einander gleich werden; dann wird auf der linken Seite die der rechts hinzutretenden constanten Grösse, welche ein ganzes Multiplum von ω_1 ist, äquivalente Constante nur von dem Durchschneiden der Querschnitte durch die Integrationswege der linken Seite herstammen, somit nur ein ganzes Vielfaches der $2p$ Periodicitätsmoduln sein können. Verfährt man ebenso mit jedem der $2p$ Periodicitätsmoduln, so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varepsilon m_1 \omega_1 &= a_{11}\omega_1 + b_{11}\omega_1' + a_{12}\omega_2 + b_{12}\omega_2' + \cdots + a_{1p}\omega_p + b_{1p}\omega_p' \\
\varepsilon m_1' \omega_1' &= a_{11}'\omega_1 + b_{11}'\omega_1' + a_{12}'\omega_2 + b_{12}'\omega_2' + \cdots + a_{1p}'\omega_p + b_{1p}'\omega_p' \\
\varepsilon m_2 \omega_2 &= a_{21}\omega_1 + b_{21}\omega_1' + a_{22}\omega_2 + b_{22}\omega_2' + \cdots + a_{2p}\omega_p + b_{2p}\omega_p' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon m_p' \omega_p' &= a_{p1}'\omega_1 + b_{p1}'\omega_1' + a_{p2}'\omega_2 + b_{p2}'\omega_2' + \cdots + a_{pp}'\omega_p + b_{pp}'\omega_p',
\end{aligned}$$

und daher die Bedingungsgleichung für ε

$$\begin{vmatrix}
a_{11} - \varepsilon m_1 & b_{11} & a_{12} & b_{12} \cdots a_{1p} & b_{1p} \\
a_{11}' & b_{11}' - \varepsilon m_1' & a_{12}' & b_{12}' \cdots a_{1p}' & b_{1p}' \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1}' & b_{p1}' & a_{p2}' & b_{p2}' \cdots a_{pp}' & b_{pp}' - \varepsilon m_p'
\end{vmatrix} = 0.$$

Es folgt somit der Satz,

dass, wenn einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung (261), *deren rechte Seite y bei einem geschlossenen Wege der Variabeln in ein Multiplum dieses Werthes übergeht oder einer Gleichung von der Form* (266) *angehört, welche nur Potenzen von y^μ enthält, ein hyperelliptisches Integral p^{ter} Ordnung genügt, unter der Voraussetzung, dass die reducirte Gleichung, wenn sie überhaupt durch ein Abel'sches Integral befriedigt wird, als solches nur ein gleichartiges hyperelliptisches Integral besitzt,*

die Grösse $e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ *die Lösung einer Gleichung* $2p^{ten}$ *Grades mit rationalen Coefficienten sein muss,* woraus nach bekannten Principien die Feststellung der möglichen Werthe für die Zahl μ hervorgeht.

Untersuchen wir genauer den Fall, in welchem $\mu \geqq 2p+1$ und ausserdem der Beschränkung unterworfen ist, eine Primzahl zu sein, so kann $e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ nur dann die Lösung einer Gleichung $2p^{ten}$ Grades mit rationalen Coefficienten sein, wenn $\mu = 2p+1$ *) ist, und es wird also die Gleichung (275) nur bestehen für

$$(276) \quad \cdots \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2p+1}},$$

worin $2p+1$ eine Primzahl und das Polynom $\varphi(\xi)$ selbst vom $2p+1^{ten}$ Grade ist. Ein solches hyperelliptisches Integral, welches eine complexe Multiplication mit dem Multiplicator (276) zulässt, ist offenbar

$$\int \frac{\xi^\varkappa d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}},$$

indem die Substitution

$$\xi = \varepsilon^\varrho \eta, \text{ worin } \varrho(\varkappa+1) \equiv 1 \ (\text{mod. } 2p+1),$$

die Beziehung liefert

$$\int \frac{\xi^\varkappa d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}} = \varepsilon \int \frac{\eta^\varkappa d\eta}{\sqrt{\eta^{2p+1}-1}},$$

und wir wollen uns nun mit dem Falle beschäftigen, in dem die Differentialgleichung (261) ein Integral von der Form

$$(277) \quad z = \int^{u_1} \frac{\xi^\varkappa d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}} + \int^{u_2} \frac{\xi^\varkappa d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}} + \cdots + \int^{u_p} \frac{\xi^\varkappa d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}}$$

besitzt, wenn die rechte Seite y der Differentialgleichung durch die Gleichung definirt ist

$$(278) \quad \cdots \quad y^{l(2p+1)} + \varphi_{2p+1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})\, y^{(l-1)(2p+1)} + \cdots$$
$$\cdots + \varphi_{l(2p+1)}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

während $u_1, \cdots u_p$, sowie $\sqrt{\varphi(u_r)}$ Gleichungen von der Form (263) und (264) genügen. Lässt man nun die Variable x wieder geschlossene Umkreise beschreiben derart, dass $Y_1, \cdots Y_{m-1}$ unver-

*) Ist $2p+1=5$ und μ eine beliebige Zahl, so können dieser Forderung, wie leicht zu sehen, nur die Werthe $\mu = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ entsprechen, und ähnlich für grössere $2p+1$.

worin die Grössen L ganze Zahlen bedeuten; da aber nicht schon zwischen weniger als $\mu + 1$ der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ des Cyclus eine lineare homogene Gleichung stattfinden sollte, so muss die Relation (256) mit (233) übereinstimmen, oder es muss

$$\frac{L_\mu}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}$$

$$\frac{L_{\mu-1}}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1} \cdot \varepsilon^{\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1} \cdot \varepsilon^{\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}} \cdot \varepsilon^{\nu_\mu} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1+\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm \frac{L_1}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1} \varepsilon^{\nu_2} \cdots \varepsilon^{\nu_\mu} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\mu}$$

sein; da aber die Summe von ε-Potenzen nur einer rationalen Zahl oder Null gleich sein kann, wenn sie sämmtlich in dieser Summe vorkommen, so würde das Bestehen der obigen Gleichungen wieder erfordern, dass in der Entwicklung der algebraischen Function um jenen Verzweigungspunkt in dem angegebenen Sinne alle gebrochenen Potenzen vorkommen müssen, es können somit — diesen Fall ausgeschlossen — auch die bei der obigen successiven Reduction sich ergebenden Einzelklammern nicht verschwinden, und es ergiebt sich somit der nachfolgende Satz:

Genügt einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

ein elliptisches Integral erster Gattung, und kommen in der Entwicklun der Function y um irgend einen ihrer Verzweigungspunkte α für ein primzahligen Cyclus ϱ nach Zusammenfassen der gleichen gebrochen Potenzen nicht alle Potenzen

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}}, \quad (x-\alpha)^{\frac{2}{\varrho}}, \cdots (x-\alpha)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}}$$

vor, so ist der Modul des elliptischen Integrales ein Modul comp Multiplication, wenn die reducirte Differentialgleichung der angege Beschränkung unterliegt.

Ist aber nun c^2 ein Modul complexer Multiplication, so r M_x, wenn es nicht eine ganze Zahl war, nothwendig die haben $\frac{1}{2}(a_x + ib_x)$, worin a_x und b_x ganze Zahlen bedeutete denen die letztere wesentlich positiv ist, und es bleiben alle früher gemachten Schlüsse gültig, bis wir zur Beziehur gelangen, aus der vermöge der eben angegebenen Form vo nur gefolgert werden kann, dass

$$(257) \quad \ldots \quad \varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu} = p + ir\sqrt{q}$$

ist, worin p, r, q rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere positiv oder Null ist und ohne quadratische Theiler angenommen werden darf. Vorausgesetzt wurde jedoch, um zur Gleichung (250) also zu der analogen (257) zu gelangen, dass die bei der Reduction successive auftretenden Einzelklammern nicht verschwinden; ist dies aber der Fall, so ergiebt sich für die der Gleichung (256) analoge Gleichung

$$(258) \cdots\cdot (P_{\mu+1} + i Q_{\mu+1} \sqrt{q}) y_{\mu+1} \\ + (P_\mu + i Q_\mu \sqrt{q}) y_\mu + \cdots + (P_1 + i Q_1 \sqrt{q}) y_1 = 0,$$

und setzt man die früher aufgestellten Entwicklungsformen der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ ein, so folgt unmittelbar, dass die Gleichung

$$(259) \cdots\cdot (P_{\mu+1} + i Q_{\mu+1} \sqrt{q}) x^\mu \\ + (P_\mu + i Q_\mu \sqrt{q}) x^{\mu-1} + \cdots + P_1 + i Q_1 \sqrt{q} = 0$$

die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ haben muss; es wird also entweder das Letztere stattfinden, oder es wird die Gleichung (257) gelten, anders ausgedrückt, es wird entweder die Gleichung (259) die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ besitzen, oder es wird die Gleichung

$$(260) \cdots\cdot x^{\nu_1} + x^{\nu_2} + \cdots + x^{\nu_\mu} = p + i r \sqrt{q}$$

die Lösung ε haben. Die Vergleichung der Beziehungen (259) und (260) mit den Kreistheilungsgleichungen und deren Zerlegungsformen liefert leicht das Resultat, *dass, wenn in der Entwicklung von y um einen primzahligen ϱ-fachen Verzweigungspunkt herum nicht alle Potenzen von $(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}}$ vorkommen und $\varrho \equiv 3 \pmod{4}$ ist, einerseits der Modul des elliptischen Integrales, welches ein Integral der linearen nicht homogenen Differentialgleichung ist, unter den bekannten Beschränkungen für die reducirte Differentialgleichung ein Modul der complexen Multiplication ist, andererseits folgt, dass die Entwicklungsform von y*

$$y = \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\varrho}} + \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\varrho}} + \cdots + \psi_{\frac{\varrho-1}{2}}(x)(x-\alpha)^{\frac{\varrho_{\frac{\varrho-1}{2}}}{\varrho}}$$

sein muss, worin $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{\frac{\varrho-1}{2}}$ entweder alle $\frac{\varrho-1}{2}$ quadratischen Reste oder alle $\frac{\varrho-1}{2}$ quadratischen Nichtreste von ϱ bedeuten; zugleich ergiebt sich, dass $\sqrt{-\varrho}$ der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales sein wird, und dass nach früher entwickelten Sätzen auch der complexe Integralmodul bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist.

setzt man ferner die Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (287)

$$v_1^{(s)\mu} + v_2^{(s)\mu} + \cdots + v_p^{(s)\mu} = S_{s\mu},$$

und addirt von den $p(2p+1)$ Gleichungen (291) je p, die zu den Lösungen derselben Gleichung (287) also zu demselben s gehören, nachdem sie der Reihe nach mit

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & \cdots 1 \\ v_1^{(s)\varkappa+1} & v_2^{(s)\varkappa+1} & \cdots v_p^{(s)\varkappa+1} \\ v_1^{(s)2(\varkappa+1)} & v_2^{(s)2(\varkappa+1)} & \cdots v_p^{(s)2(\varkappa+1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_1^{(s)(p-1)(\varkappa+1)} & v_2^{(s)(p-1)(\varkappa+1)} & \cdots v_p^{(s)(p-1)(\varkappa+1)} \end{array}$$

multiplicirt sind, so erhält man das folgende System von Gleichungen, in welchem $s = 0, 1, 2, \cdots 2p$ zu setzen ist:

$$\begin{aligned} (292) \quad & S_{sp(p+1)} + a_{p(p+1)-1} S_{sp(p+1)-1} + \cdots + a_1 S_{s1} + a_0 S_{s0} \\ & + b_{p^2-1} \Big\{ \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp(p+1)-2} + \cdots \\ & \qquad \cdots + \varphi_{p-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp^2-1} \Big\} \\ & + b_{p^2-2} \Big\{ \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp(p+1)-3} + \cdots \\ & \qquad \cdots + \varphi_{p-1}(x, Y_1', \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp^2-2} \Big\} \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + b_0 \Big\{ \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp-1} + \cdots \\ & \qquad \cdots + \varphi_{p-1}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{s0} \Big\} = 0, \end{aligned}$$

und noch $p-1$ ähnlich gestaltete, die sich von (292) nur dadurch unterscheiden, dass alle zweiten Indices der S um resp. $\varkappa+1$, $2(\varkappa+1)$, $3(\varkappa+1)$, $\cdots (p-1)(\varkappa+1)$ Einheiten erhöht sind. Fassen wir die gleichartigen $2p+1$ Gleichungen (292) auf, welche den Werthen $s=0, 1, 2, \cdots 2p$ entsprechen und beachten, dass, wenn für $S_{0\lambda}$ als Potenzsumme der Lösungen der Gleichung

$$v^p + f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) v^{p-1} + \cdots + f_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0$$

vermöge der Gleichung (278) die Form

$$S_{0\lambda} = \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda y + \mathfrak{C}_\lambda y^2 + \cdots + \mathfrak{L}_\lambda y^{2p}$$

gesetzt wird, worin $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda, \cdots \mathfrak{L}_\lambda$ rationale Functionen von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind, sich

$$(293) \quad \cdots\cdot\; S_{s\lambda} = \varepsilon^{-\lambda m_s} \{ \mathfrak{A}_\lambda + \varepsilon^s \mathfrak{B}_\lambda y + \varepsilon^{2s} \mathfrak{C}_\lambda y^2 + \cdots + \varepsilon^{2ps} \mathfrak{L}_\lambda y^{2p} \}$$

ergiebt, so wird, wenn bemerkt wird, dass aus den einzelnen

Klammern, welche die Factoren der b-Coefficienten in der Gleichung (292) bilden, die respectiven Einheitswurzeln

$$\varepsilon^{(p^2-1)m_s}, \ \varepsilon^{-(p^2-2)m_s}, \ldots \varepsilon^{0.m_s}$$

heraustreten, während die Klammern wieder die Form annehmen

$$b_\nu \cdot \varepsilon^{-\nu m_s} \left\{A_\nu + \varepsilon^s B_\nu y + \varepsilon^{2s} \Gamma_\nu y^2 + \cdots + \varepsilon^{2ps} \Lambda_\nu y^{2p}\right\},$$

die Addition der $2p+1$ Gleichungen (292), wie leicht zu sehen, folgendermassen bewerkstelligt werden können. Bezeichnen nämlich δ und η gegebene ganze Zahlen, und bestimmt man, was, da $2p+1$ eine Primzahl, immer möglich ist, zwei ganze Zahlen σ_δ und τ_η aus den Congruenzen

$$(294) \cdots\cdot \sigma_\delta(\varkappa + 1) \equiv \delta, \quad \tau_\eta(\varkappa + 1) \equiv \eta \quad (\text{mod.}\, 2p+1),$$

so wird in der Additionsgleichung der Coefficient von a_δ lauten:

$$(295) \ \mathfrak{A}_\delta \sum_0^{2p} {}_s\, \varepsilon^{-\delta m_s} + \mathfrak{B}_\delta y \sum_0^{2p} {}_s\, \varepsilon^{-\delta m_s + s} + \cdots + \mathfrak{L}_\delta y^{2p} \sum_0^{2p} {}_s\, \varepsilon^{-\delta m_s + 2ps},$$

und der von b_η:

$$(296) \ A_\eta \sum_0^{2p} {}_s\, \varepsilon^{-\delta m_s} + B_\eta y \sum_0^{2p} {}_s\, \varepsilon^{-\delta m_s + s} + \cdots + \Lambda\cdot y^{2p} \sum_0^{2p} {}_s\, \varepsilon^{-\delta m_s + 2ps},$$

und, wenn man berücksichtigt, dass nach den Congruenzen (285 a) und (294)

$$(297) \quad -\delta m_s + \sigma_\delta s \equiv 0 \quad \text{und} \quad -\eta m_s + \tau_\eta s \equiv 0 \ (\text{mod.}\, 2p+1)$$

ist, so folgt, dass der Coefficient von a_δ nur noch lautet

$$\mathfrak{T}_\delta y^{\sigma_\delta},$$

während der Coefficient von b_η

$$T_\eta y^{\tau_\eta}$$

ist, und somit das Resultat der Addition

$$(298) \ \mathfrak{T}_{p(p+1)} y^{\sigma_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1} \mathfrak{T}_{p(p+1)-1} y^{\sigma_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_1 \mathfrak{T}_1 y^{\sigma_1} + a_0 \mathfrak{T}_0 y^{\sigma_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T_{p^2-1} y^{\tau_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2} y^{\tau_{p^2-2}} + \cdots + b_1 T_1 y^{\tau_1} + b_0 T_0 y^{\tau_0} = 0,$$

worin die $\mathfrak{T}$ und T rationale Functionen von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind.

Multiplicirt man die $2p+1$ Gleichungen (292) der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{2p} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{4p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{2p} & \varepsilon^{4p} & \cdots & \varepsilon^{4p^2}, \end{matrix}$$

so lautet das Resultat der Addition dieser Gleichungen mit Berücksichtigung der obigen Congruenzen und der Wahl ähnlicher Bezeichnungen wie oben

$$(299)\quad \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)}\, y^{\sigma_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\, \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)-1}\, y^{\sigma_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_0 y^{\sigma_0}$$
$$+ b_{p^2-1}\, T^{(\varrho)}_{p^2-1}\, y^{\tau_{p^2-1}} + b_{p^2-2}\, T^{(\varrho)}_{p^2-2}\, y^{\tau_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{(\varrho)}_0\, y^{\tau_0} = 0,$$

worin $\varrho = 0, 1, 2, \cdots 2p$ zu setzen ist.

Man sieht leicht, dass in all' den Gleichungen, welche man auf dieselbe Weise aus der Gleichung (292) herleitet, nachdem in derselben die zweiten Indices der S um resp. $\varkappa + 1,\ 2(\varkappa + 1), \cdots (p-1)(\varkappa+1)$ Einheiten erhöht worden, nur statt δ und η die Grössen $\delta + (\varkappa + 1)\zeta$ und $\eta + (\varkappa + 1)\zeta$ auftreten werden, wenn der Index von S um $(\varkappa + 1)\zeta$ Einheiten erhöht ist, und wenn man daher wieder zwei ganze Zahlen μ_δ und ν_η aus den Congruenzen bestimmt

$$\left.\begin{aligned} \mu_\delta(\varkappa+1) &\equiv \delta + (\varkappa+1)\zeta \\ \nu_\eta(\varkappa+1) &\equiv \eta + (\varkappa+1)\zeta \end{aligned}\right\} \pmod{2p+1},$$

so wird die der Gleichung (298) analoge Gleichung folgendermassen lauten

$$(390)\quad \mathfrak{T}^{0\zeta}_{p(p+1)}\, y^{\mu_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\, \mathfrak{T}^{0\zeta}_{p(p+1)-1}\, y^{\mu_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0 \mathfrak{T}^{0\zeta}_0 y^{\mu_0}$$
$$+ b_{p^2-1}\, T^{0\zeta}_{p^2-1}\, y^{\nu_{p^2-1}} + b_{p^2-2}\, T^{0\zeta}_{p^2-2}\, y^{\nu_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{0\zeta}_0\, y^{\nu_0} = 0;$$

wenn man aber berücksichtigt, dass wegen

$$(\varkappa+1)(\mu_\delta - \zeta) \equiv \delta \quad \text{und} \quad (\varkappa+1)\,\sigma_\delta \equiv \delta \pmod{2p+1}$$

auch

$$\mu_\delta \equiv \sigma_\delta + \zeta \quad \text{und ebenso} \quad \nu_\eta \equiv \tau_\eta + \zeta \pmod{2p+1}$$

folgt, so ergeben sich, wenn die Gleichungen mit $y^{-\zeta}$ multiplicirt werden, endlich die $p(2p+1)$ Bestimmungsgleichungen für die im Abel'schen Theorem vorkommenden Constanten a und b in der Form

$$(301)\quad \mathfrak{T}^{\varrho\zeta}_{p(p+1)}\, y^{\sigma_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\, \mathfrak{T}^{\varrho\zeta}_{p(p+1)-1}\, y^{\sigma_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0 \mathfrak{T}^{\varrho\zeta}_0 y^{\sigma_0}$$
$$+ b_{p^2-1}\, T^{\varrho\zeta}_{p^2-1}\, y^{\tau_{p^2-1}} + b_{p^2-2}\, T^{\varrho\zeta}_{p^2-2}\, y^{\tau_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{\varrho\zeta}_0\, y^{\tau_0} = 0,$$

worin für ϱ alle Zahlen $0, 1, 2, \cdots 2p$, für ζ die Zahlen $0, 1, 2, \cdots p-1$ zu setzen sind.

Aus dem Gleichungssystem (301) ist nun unmittelbar zu ersehen, dass, wenn

$$\sigma_{p(p+1)} - \sigma_{p(p+1)-\alpha} = \psi_\alpha, \quad \sigma_{p(p+1)} - \tau_{p^2-\alpha} = \chi_\alpha$$

gesetzt wird,

$$a_{p(p+1)-\alpha} = U_\alpha y^{\psi_\alpha}, \quad b_{p^2-\alpha} = V_\alpha y^{\chi_\alpha}$$

folgt, worin U_α und V_α rationale Functionen von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind, und man erhält somit

$$(302) \cdots\cdot p(v)^2 - q(v)^2(v^{2p+1}-1)$$
$$= [v^{p(p+1)} + U_1 y^{\psi_1} v^{p(p+1)-1} + \cdots + U_{p(p+1)-1} y^{\psi_{p(p+1)-1}} v + U_{p(p+1)} y^{\psi_{p(p+1)}}]^2$$
$$- [V_1 y^{\chi_1} v^{p^2-1} + V_2 y^{\chi_2} v^{p^2-2} + \cdots + V_{p^2-1} y^{\chi_{p^2-1}} v + V_{p^2} y^{\chi_{p^2}}]^2 (v^{2p+1}-1) = 0.$$

Berücksichtigt man nun die oben für die σ- und τ-Grössen aufgestellten Congruenzen, so findet man leicht, dass, wenn

$$(303) \cdots\cdot v = wy^\lambda$$

gesetzt wird, worin λ eine Lösung der Congruenz

$$(304) \cdots\cdot \lambda(\varkappa+1) \equiv 1 \pmod{2p+1}$$

bedeutet, ein Posten des ersten Quadrates der Gleichung (302) lautet:

$$U_\alpha y^{\psi_\alpha + \lambda[p(p+1)-\alpha]} \cdot w^{p(p+1)-\alpha}$$

oder auch vermöge der oben bezeichneten Congruenzen:

$$\mathfrak{U}_\alpha y^{\lambda p(p+1)} w^{p(p+1)-\alpha},$$

und ein Posten des zweiten Quadrates von (302):

$$V_\alpha y^{\chi_\alpha + \lambda(p^2-\alpha)} w^{p^2-\alpha} = \mathfrak{V}_\alpha y^{\lambda p(p+1)} w^{p^2-\alpha},$$

und die Gleichung (302) daher die Form annimmt:

$$(305) \cdots\cdot p(v)^2 - q(v)^2(v^{2p+1}-1)$$
$$= y^{2\lambda p(p+1)} [w^{p(p+1)} + \mathfrak{U}_1 w^{p(p+1)-1} + \cdots + \mathfrak{U}_{p(p+1)}]^2$$
$$- (\mathfrak{V}_1 w^{p^2-1} + \cdots + \mathfrak{V}_{p^2})^2 (w^{2p+1} y^{\lambda(2p+1)} - 1),$$

worin die Grössen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind.

Nun ist aber auch

$$(306) \cdots\cdot p(v)^2 - q(v)^2(v^{2p+1}-1) = \prod_0^{2p}{}_s \prod_1^{p}{}_r (v - v_r^{(s)}) \times$$
$$(v-Z_1)(v-Z_2)\cdots(v-Z_p);$$

aus der Gleichung (287) folgt ferner

$$\prod_0^{2p}{}_s \prod_1^{p}{}_r (v - v_r^{(s)})$$
$$= \prod_0^{2p}{}_s \left\{ \varepsilon^{pm_s} v^p + \varepsilon^{(p-1)m_s} f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) v^{p-1} + \cdots + f_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, \varepsilon^s y) \right\},$$

worin die Grössen L ganze Zahlen bedeuten; da aber nicht schon zwischen weniger als $\mu+1$ der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ des Cyclus eine lineare homogene Gleichung stattfinden sollte, so muss die Relation (256) mit (233) übereinstimmen, oder es muss

$$-\frac{L_\mu}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu}$$

$$\frac{L_{\mu-1}}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1}\cdot\varepsilon^{\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1}\cdot\varepsilon^{\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}}\cdot\varepsilon^{\nu_\mu} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1+\nu_3} + \cdots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}+\nu_\mu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\frac{L_1}{L_{\mu+1}} = \varepsilon^{\nu_1}\,\varepsilon^{\nu_2}\cdots\varepsilon^{\nu_\mu} = \varepsilon^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\mu}$$

sein; da aber die Summe von ε-Potenzen nur einer rationalen Zahl oder Null gleich sein kann, wenn sie sämmtlich in dieser Summe vorkommen, so würde das Bestehen der obigen Gleichungen wieder erfordern, dass in der Entwicklung der algebraischen Function um jenen Verzweigungspunkt in dem angegebenen Sinne alle gebrochenen Potenzen vorkommen müssen, es können somit — diesen Fall ausgeschlossen — auch die bei der obigen successiven Reduction sich ergebenden Einzelklammern nicht verschwinden, und es ergiebt sich somit der nachfolgende Satz:

Genügt einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1}\frac{dz}{dx} = y$$

ein elliptisches Integral erster Gattung, und kommen in der Entwicklung der Function y um irgend einen ihrer Verzweigungspunkte α für einen primzahligen Cyclus ϱ nach Zusammenfassen der gleichen gebrochenen Potenzen nicht a l l e *Potenzen*

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}},\quad (x-\alpha)^{\frac{2}{\varrho}},\ \cdots\ (x-\alpha)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}}$$

vor, so ist der Modul des elliptischen Integrales ein Modul complexer Multiplication, wenn die reducirte Differentialgleichung der angegebenen Beschränkung unterliegt.

Ist aber nun c^2 ein Modul complexer Multiplication, so musste $M_\varkappa$, wenn es nicht eine ganze Zahl war, nothwendig die Form haben $\frac{1}{2}(a_\varkappa + ib_\varkappa)$, worin $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ ganze Zahlen bedeuteten, von denen die letztere wesentlich positiv ist, und es bleiben offenbar alle früher gemachten Schlüsse gültig, bis wir zur Beziehung (250) gelangen, aus der vermöge der eben angegebenen Form von $M_\mu^{(\mu-1)}$ nur gefolgert werden kann, dass

$$(257)\ \cdots\cdot\ \varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \cdots + \varepsilon^{\nu_\mu} = p + ir\sqrt{q}$$

ist, worin p, r, q rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere positiv oder Null ist und ohne quadratische Theiler angenommen werden darf. Vorausgesetzt wurde jedoch, um zur Gleichung (250) also zu der analogen (257) zu gelangen, dass die bei der Reduction successive auftretenden Einzelklammern nicht verschwinden; ist dies aber der Fall, so ergiebt sich für die der Gleichung (256) analoge Gleichung

$$(258) \cdots\cdot (P_{\mu+1} + i\,Q_{\mu+1}\sqrt{q})\,y_{\mu+1} + (P_\mu + iQ_\mu\sqrt{q})\,y_\mu + \cdots + (P_1 + i\,Q_1\sqrt{q})\,y_1 = 0,$$

und setzt man die früher aufgestellten Entwicklungsformen der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu+1}$ ein, so folgt unmittelbar, dass die Gleichung

$$(259) \cdots\cdot (P_{\mu+1} + i\,Q_{\mu+1}\sqrt{q})x^\mu + (P_\mu + i\,Q_\mu\sqrt{q})x^{\mu-1} + \cdots + P_1 + i\,Q_1\sqrt{q} = 0$$

die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ haben muss; es wird also entweder das letztere stattfinden, oder es wird die Gleichung (257) gelten, anders ausgedrückt, es wird entweder die Gleichung (259) die Lösungen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots \varepsilon^{\nu_\mu}$ besitzen, oder es wird die Gleichung

$$(260) \cdots\cdot x^{\nu_1} + x^{\nu_2} + \cdots + x^{\nu_\mu} = p + i\,r\sqrt{q}$$

die Lösung ε haben. Die Vergleichung der Beziehungen (259) und (260) mit den Kreistheilungsgleichungen und deren Zerlegungsformen liefert leicht das Resultat, *dass, wenn in der Entwicklung von y um einen primzahligen ϱ-fachen Verzweigungspunkt herum nicht alle Potenzen von* $(x-\alpha)^{\frac{1}{\varrho}}$ *vorkommen und* $\varrho \equiv 3 \pmod{4}$ *ist, einerseits der Modul des elliptischen Integrales, welches ein Integral der linearen nicht homogenen Differentialgleichung ist, unter den bekannten Beschränkungen für die reducirte Differentialgleichung ein Modul der complexen Multiplication ist, andererseits folgt, dass die Entwicklungsform von y*

$$y = \psi_1(x)\,(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\varrho}} + \psi_2(x)\,(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\varrho}} + \cdots + \psi_{\frac{\varrho-1}{2}}(x)\,(x-\alpha)^{\frac{\varrho_{\frac{\varrho-1}{2}}}{\varrho}}$$

sein muss, worin $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{\frac{\varrho-1}{2}}$ *entweder alle* $\frac{\varrho-1}{2}$ *quadratischen Reste oder alle* $\frac{\varrho-1}{2}$ *quadratischen Nichtreste von* ϱ *bedeuten; zugleich ergiebt sich, dass* $\sqrt{-\varrho}$ *der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales sein wird, und dass nach früher entwickelten Sätzen auch der complexe Integralmodul bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist.*

sich als rationale Functionen von W_ϱ darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung und y^{2p+1} zusammengesetzt sind.

Somit sehen wir auch in diesem Falle die Transformation der Integrale von Differentialgleichungen oder Quadraturen — und auf diese Resultate haben wir früher hingewiesen — auf algebraische Gleichungen führen, die in ihren Coefficienten nur rationale Zusammensetzungen der Variabeln und nicht die algebraische Irrationalität enthalten, wenn y selbst einer binomischen Gleichung $2p + 1^{\text{ten}}$ Grades genügt.

Die Methoden, mit Hülfe der Gleichung in W und der oben gefundenen Form der Irrationalität alle Differentialgleichungen aufzustellen, welchen durch hyperelliptische Integrale der angegebenen Beschaffenheit genügt wird, sind oben erörtert worden, und ebenso bedarf die Verallgemeinerung dieser Untersuchungen auf Abel'sche Integrale keiner weiteren Ausführung.

Zusatz.

Ich will nachträglich bemerken, dass die in den §§ 14 und 15 für die reducirte Differentialgleichung festgesetzten Bedingungen für den Fall von logarithmischen und Abel'schen Integralen nicht homogener linearer Differentialgleichungen darauf zu beschränken sind, dass dieselben überhaupt nicht derartige Integrale besitzen, während die Annahme solcher Integrale, deren Argumente rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, eine etwas modificirte Untersuchung erfordert, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde.

Auf weitere Untersuchungen, welche den Fall $\varrho \equiv 1 \pmod{4}$ betreffen und auf zusammengesetzte ϱ ausgedehnt werden können, wollen wir hier nicht weiter eingehen, und nur noch auf die ähnlichen Untersuchungen hinweisen, welche die complexe Multiplication der hyperelliptischen und Abel'schen Integrale berühren.

Nehmen wir an, dass die Differentialgleichung

$$(261) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

durch ein hyperelliptisches Integral erster Gattung — und auf Integrale erster Gattung konnte das Problem, wie oben gezeigt worden, stets zurückgeführt werden — befriedigt werde, so war früher nachgewiesen, dass auch stets, von einem Zahlenfactor abgesehen, ein Integral der Differentialgleichung von der Form existirt

$$(262) \cdots z = \int^{u_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \int^{u_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \cdots + \int^{u_p} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}},$$

worin $f(\xi)$ eine ganze Function höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, $\varphi(\xi)$ ein ganzes Polynom vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, und

$$u_1,\ u_2, \cdots u_p$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(263) \quad u^p + f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)\, u^{p-1} + \cdots + f_p(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) = 0$$

sind, deren Coefficienten rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind

$$(264) \cdots \sqrt{\varphi(u_r)} = F(u_r, x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y),$$

in der F wiederum eine rationale Function bezeichnet. Machen wir nunmehr die oben für den Fall, dass die Differentialgleichung durch ein elliptisches Integral befriedigt wird, zu Grunde gelegte Voraussetzung, dass zwischen zwei Zweigen der algebraischen Function y eine homogene lineare Relation besteht, oder dass

$$(265) \cdots y_1 = \varepsilon y,$$

worin ε, wie gezeigt worden, eine μ^{te} Einheitswurzel sein musste, und die die Grösse y definirende algebraische Gleichung die Form hatte

$$(266) \quad y^{\varkappa\mu} + \varphi_\mu(x, Y_1, \cdots Y_{m-1})\, y^{(\varkappa-1)\mu} + \cdots + \varphi_{\varkappa\mu}(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}) = 0,$$

so folgt genau wie früher, dass der Ausdruck

$$(267) \cdots z_1 = \int^{v_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \int^{v_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \cdots + \int^{v_p} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

Hochheim, Dr. **Adolf**, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. geh. in 2 Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. *M* 1.50. B. Auflösungen. [102 S.] n. *M* 1. 50. Zusammen *M* 3.—

Holzmüller, Dr. **Gustav**, Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Mit 26 lithographirten Tafeln. [VIII u. 284 S.] gr. 8. geh. n. *M* 11.20.

Klein, Dr. **Felix**, o. ö. Professor der Geometrie a. d. Universität Leipzig, über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. [VIII u. 82 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

Koehler, Dr. **Carl**, über eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen. [32 S.] gr. 8. geh. *M* 1.—.

Krazer, Dr. **Adolf**, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. [VII u. 66 S.] gr. 4. geh. n. *M* 3.60.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weißenburg i. Elsaß, elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. geh. n. *M* 8.80.

Netto, Dr. **Eugen**, a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Strassburg i. E., Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. [VIII u. 290 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.80.

Pasch, Dr. **Moritz**, Professor an der Universität zu Gießen, Vorlesungen über neuere Geometrie. [IV u. 201 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4.—.

——— Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VII u. 168 S.] gr. 8. geh. n. *M* 3.20.

Prym, Dr. **Friedrich**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. [VIII u. 112 S.] gr. 4. geh. n. *M* 6.—.

Reidt, Prof. Dr. **F.**, Oberlehrer am Gymnasium und der höheren Bürgerschule in Hamm, die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VII u. 50 S.] gr. 8. kart. *M* 1.20.







